

Guide technique

Comment estimer les incertitudes affectant les mesures de concentrations et de flux polluants en réseau d'assainissement

Rédacteurs : P.-A. VERSINI (LEESU), A. HANNOUCHE (LEESU), C.
JOANNIS (IFSTTAR), A. G. CHEBBO (LEESU)

Sommaire

RESUME.....	5
PRINCIPALES NOTATIONS DES CHAPITRES 3, 4 et 5	6
1 INTRODUCTION.....	7
1.1 Contexte réglementaire et enjeux opérationnels	7
1.2 Objectifs et destinataires du guide	8
1.3 Structure du document	9
2 NOTIONS DE BASE.....	11
2.1 Cadre normatif.....	11
2.2 Concepts fondamentaux et définitions	11
2.3 Définitions complémentaires.....	17
2.4 Processus d'estimation de l'incertitude sur le résultat d'un mesurage.....	18
2.4.1 Phase 1 : Spécification du mesurande	19
2.4.2 Phase 2 : Identification des sources d'incertitude	21
2.4.3 Phase 3 : Structures des erreurs (ε_i).....	23
2.4.4 Phase 4 : Quantification des composantes de l'incertitude	27
2.4.5 Phase 5 : Calcul de l'incertitude composée.....	30
2.4.6 Phase 6 : Compte rendu de l'incertitude	34
3 IDENTIFICATION ET QUANTIFICATION DES INCERTITUDES SUR LES MESURANDES PRIMAIRES	36
3.1 Hauteur d'eau (h)	36
3.1.1 Capteurs ultrasonores	36
3.1.2 Capteurs piézométriques	37
3.2 Vitesse « locale » (u_c et u_D).....	39
3.2.1 Mesure du temps de transit (cordes de vitesse).....	39
3.2.2 Capteurs Doppler.....	40
3.3 Concentration obtenue par analyse sur un prélèvement ($C_{éch}$).....	42
3.3.1 Principe.....	42
3.3.2 Sources d'erreur	42
3.3.3 Valeurs indicatives	42
3.4 Turbidité (T_{up})	43
3.4.1 Principe.....	43
3.4.2 Sources d'incertitude.....	43
3.4.3 Estimation de l'incertitude d'étalonnage.....	43
3.4.4 Estimation de l'incertitude expérimentale.....	44
3.4.5 Valeurs indicatives	45
4 COMPOSITIONS DES INCERTITUDES SUR DES GRANDEURS DERIVEES INSTANTANEEES	46
4.1 Mesure de vitesse moyenne dans une section (U).....	46
4.1.1 A l'aide de cordes de vitesse	46
4.1.2 A l'aide d'un capteur Doppler.....	47
4.2 Calcul de débit à l'aide d'une mesure de hauteur et de la vitesse moyenne (Q(h,U)) 47	
4.2.1 Section circulaire	48
4.2.2 Section quelconque (régression polynômiale de 2 nd degré)	49
4.2.3 Section quelconque (relation S(h) tabulée)	50
4.3 Concentration moyenne dans une section (C_s) évaluée à partir d'une analyse sur un prélèvement	51
4.4 Turbidité moyenne dans une section (T_{us}) évaluée à partir d'une mesure locale.....	52

4.5	Concentration de MES évaluée à partir de la turbidité (C_T)	52
4.6	Mesure de flux polluant instantané (Φ).....	53
5	COMPOSITIONS DES INCERTITUDES SUR DES GRANDEURS INTEGREES	
	DANS LE TEMPS	54
5.1	Erreurs d'interpolation	54
5.2	Calcul générique des incertitudes sur une grandeur intégrée dans le temps	56
5.3	Stratégies de prélèvement.....	58
5.4	Concentration moyenne événementielle (C_e) déterminée par analyse d'un échantillon composite.....	59
5.5	Volume événementiel (V_e).....	62
5.6	Masse événementielle calculée à partir du volume et de la concentration d'un échantillon moyen composite.....	63
5.7	Masse événementielle calculée à partir d'un hydrogramme et d'un pollutogramme de concentration	64
5.7.1	Prélèvement à pas de temps constant	65
5.7.2	Prélèvement à pas de volume constant.....	65
5.8	Masse événementielle calculée à partir d'un hydrogramme et d'un pollutogramme de turbidité.....	66
5.9	Concentration événementielle calculée à partir d'un pollutogramme et d'un hydrogramme	67
5.10	Concentration moyenne inter-événementielle et concentration caractéristique.....	68
5.11	Masse annuelle (M_{an})	70
6	CONCLUSIONS ET TABLEAU DE SYNTHESE.....	72
7	Annexe A : Méthode de Monte Carlo	77
8	Annexe B : Régression polynomiale pondérée: incertitudes sur les deux variables.....	79
8.1	Régression sans barre d'erreur sur les mesures ($u(x_i)=0$ et $u(y_i)=0$) : erreurs résiduelles.....	79
8.2	Régression linéaire ou polynômiale avec barres d'erreurs sur les mesures.....	82
8.2.1	Cas particulier : régression linéaire (degré $n=1$)	82
8.2.2	Cas général : Régression polynômiale de degré n	83
8.2.3	Calcul d'incertitude sur une valeur prédite	85

RESUME

Ce document constitue un des livrables de la tâche 7 du projet Mentor. Il s'intéresse à l'estimation des incertitudes affectant les mesures de concentrations et de flux polluants en réseau d'assainissement. Organisé comme un guide méthodologique, il présente le vocabulaire employé, les textes références et détaille les différentes étapes à mettre en œuvre pour parvenir à une estimation fiable des différentes sources d'incertitude pouvant affecter une mesure.

Il explicite ensuite la manière de mettre en œuvre ces méthodes dans le contexte de l'assainissement sur des mesures que des opérateurs seront amenés à réaliser, contrôler ou utiliser (débits, concentrations, en particulier MES, turbidité) et sur les grandeurs qui en sont dérivées (flux, masse, concentration moyenne ou caractéristique). Pour chaque cas, on explique comment établir une incertitude globale pour une grandeur donnée en tenant compte des différentes sources d'incertitude rencontrées dans la chaîne de mesure et de leur propagation dans les divers traitements. Cela inclut les conséquences d'erreurs provenant de l'instrument de mesure, de l'environnement, du protocole expérimental ainsi que de la variabilité du phénomène physique étudié.

Ces différents éléments de méthode sont illustrés par des exemples concrets et des ordres de grandeur, et complétés par des outils informatiques commentés facilitant les calculs.

PRINCIPALES NOTATIONS DES CHAPITRES 3, 4 et 5

C_{cara} : concentration caractéristique ou concentration moyenne inter-événementielle
 C_e : concentration moyenne événementielle (en un polluant donné)
 $C_{éch}$: concentration d'un échantillon (en un polluant donné)
 C_s : concentration moyenne dans une section (d'un polluant donné)
 Φ : flux polluant traversant une section (pour un polluant donné)
 h : hauteur d'eau, c'est à dire cote d'une surface libre référencée par rapport à la cote du radier
 K_{inter} : coefficient caractérisant l'erreur d'interpolation d'une discrétisation donnée, d'un signal donné, sur une période de temps donnée
 K_{pond} : coefficient caractérisant l'erreur de pondération d'une stratégie de prélèvement donnée, d'un signal donné, sur une période de temps donnée
 K_{spa} : coefficient caractérisant l'erreur d'extrapolation d'une mesure locale de concentration par rapport à la concentration moyenne dans une section
 K_u : coefficient d'extrapolation d'une vitesse locale à la vitesse moyenne dans une section
 M_{cum} : masse cumulée inter-événementielle
 M_e : masse événementielle
 n_e : nombre d'échantillons acquis pendant un événement
 Q : débit instantané traversant une section
 Σ : section d'un écoulement (a priori perpendiculaire à la direction principale d'écoulement)
 S : surface de la section Σ
 T_{up} : turbidité mesurée sur un prélèvement ou in situ
 T_{us} : turbidité moyenne dans une section
 U : vitesse moyenne dans une direction normale à une section
 u : vitesse locale mesurée dans un domaine défini par le type de capteur utilisé (à ne pas confondre avec $u(x)$ incertitude-type sur la grandeur x)
 u_c : vitesse locale mesurée par une corde de vitesse
 u_d : vitesse locale mesurée par un capteur à effet Doppler
 T_{us} : turbidité moyenne dans une section
 T_e : durée d'un événement
 V_e : volume événementiel

1 INTRODUCTION

La connaissance du fonctionnement réel d'un système d'assainissement passe par des mesures de pluie, de débits et de concentrations. Cette connaissance est nécessaire pour rendre compte des performances du système de collecte et des ouvrages de traitement, concevoir des améliorations et extensions, programmer des travaux, et même piloter le système en temps réel.

Mais il n'y a pas de mesure qui ne soit entachée d'erreur, et c'est particulièrement vrai en hydrologie urbaine où on dépasse rarement une précision de l'ordre de 10%. L'erreur est par nature inconnaissable (sinon elle serait corrigée) mais on peut évaluer la gamme de ses valeurs possibles et l'exprimer sous forme d'incertitude.

1.1 Contexte réglementaire et enjeux opérationnels

Les arrêtés du 22 décembre 1994 et du 22 juin 2007 relatifs à l'autosurveillance des réseaux d'assainissement demandent une estimation des charges polluantes en MES et DCO : « *Les déversoirs d'orage et dérivations éventuelles situés sur un tronçon destiné à collecter une charge brute de pollution organique par temps sec supérieure à 600 kg/j de DBO₅ [demande biologique en oxygène mesurée à 5 jours] font l'objet d'une surveillance, permettant de mesurer en continu le débit et d'estimer la charge polluante (MES, DCO) déversée par temps de pluie ou par temps sec. [...] Les dispositions du présent article peuvent être adaptées par le préfet aux exigences du milieu récepteur. Dans ce cas, il peut demander à l'exploitant des estimations de la charge polluante (MES, DCO) déversée par temps de pluie ou par temps sec..., y compris pour les déversoirs d'orage situés sur un tronçon collectant une charge brute de pollution organique supérieure à 120 kg/j et inférieure ou égale à 600 kg/j de DBO₅.* ».

Dans ces textes, il n'est pas explicitement fait référence à la notion de précision ou d'incertitude, même si le terme « estimation » opposé à « mesure en continu » suggère une incertitude plus grande affectant les estimations de charges polluantes, qui peuvent d'ailleurs être obtenues par d'autres méthodes qu'une mesure en continu (données de la littérature ou résultats de modèle par exemple).

En revanche la notion d'incertitude est prise en compte dans des textes réglementaires s'appliquant à un domaine voisin de la surveillance des réseaux, à savoir la surveillance des milieux aquatiques. Ainsi la directive européenne 2009/90/CE dite directive QA/QC (pour Quality Assurance / Quality Control fixe, dans le cadre des programmes de surveillance de la Directive Cadre Européenne sur l'Eau, des spécifications techniques pour les analyses de laboratoire. Sa transposition en droit français s'est faite à travers l'arrêté du 27 Octobre 2011 portant sur les « modalités d'agrément des laboratoires effectuant des analyses dans le domaine de l'eau et des milieux aquatiques au titre du code de l'environnement ». Ce texte définit les conditions dans lesquelles un laboratoire qui effectue des analyses physico-chimiques, chimiques, hydrobiologiques ou écotoxicologiques et des contrôles des eaux et des sédiments dans le domaine de l'eau et des milieux aquatiques peut être agréé par le Ministère de l'environnement. Dans ce document, il est demandé, pour chaque paramètre pour lequel le laboratoire sollicite un agrément,

de spécifier ses caractéristiques propres, le principe de la méthode utilisée (ainsi que sa référence), la limite de quantification, ainsi que **l'incertitude de la mesure**.

Cependant cette notion d'incertitudes associées aux analyses est encore très peu connue et/ou mal interprétée par les opérationnels. Elle est encore moins prise en compte lors de mesure en continu *in situ* faute de document détaillant les méthodes spécifiques qui peuvent leur être appliquées.

Il faut reconnaître que les incertitudes sont un peu délicates à évaluer avec précision car elles ne se réduisent pas à l'application d'une méthode de calcul. Elles impliquent une connaissance des processus liés aux technologies et matériels et méthodes utilisés, mais aussi à l'environnement peu contrôlé dans lequel ils sont mis en œuvre. Elles nécessitent une analyse rigoureuse de ces processus, avec un niveau de détail compatible avec les contraintes pratiques du mesurage, qui impose quelques approximations.

D'autre part, la notion même d'incertitude est difficile à accepter : elle reste perçue comme une dégradation d'une information pourtant acquise à grand frais.

En effet, **l'incertitude** de mesure est définie dans le Vocabulaire International de la métrologie (VIM) repris par la norme NFX 07-001 (voir section suivante) comme un « *paramètre non négatif qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées à un mesurande [...]* ». Ce paramètre est souvent la largeur d'un **intervalle de confiance** ayant une probabilité (ou niveau de confiance) donné (usuellement 95%) de contenir la valeur vraie (cf. section 2.1 de ce guide). Le résultat d'une mesure n'est donc pas une valeur unique, mais un ensemble de valeurs possibles qui sont toutes à prendre en compte dans les applications. La notion d'incertitude ruine donc les illusions d'une connaissance directe et absolue des phénomènes, et nécessite d'adapter les actions à une information imparfaite.

On peut dès lors comprendre que les incertitudes ne soient pas systématiquement transmises aux utilisateurs de résultats de mesure, qui d'ailleurs se gardent bien d'en faire la demande. Mais ils perdent ainsi une information précieuse.

L'évaluation des incertitudes ne dégrade pas l'information contenue dans les résultats de mesure. C'est au contraire un gage de fiabilité des résultats fournis par le producteur de données. Elle permet à l'utilisateur d'évaluer la confiance qu'il peut accorder aux résultats de mesure, et de vérifier sa compatibilité avec les applications. Sous réserve d'être présentée pédagogiquement, elle devrait être exigée par les utilisateurs.

Il faut enfin souligner qu'une fois que les incertitudes associées aux mesurages sont identifiées et quantifiées, il est possible d'agir sur les sources d'incertitude dont l'effet est le plus important pour améliorer si nécessaire la précision du résultat.

1.2 Objectifs et destinataires du guide

Ce guide s'adresse à des opérateurs disposant d'une solide compétence/expérience dans le domaine des mesures en réseau d'assainissement et convaincus de l'intérêt de l'évaluation des incertitudes mais qui restent un peu désarmés face à la complexité des normes et ouvrages décrivant d'une manière générale et théorique

les méthodes (et notamment les calculs) à mettre en œuvre. Il doit également intéresser les services de contrôles et les utilisateurs des résultats de mesure (Agence de l'Eau, Police de l'Eau, bureaux d'études...).

En focalisant le propos sur des mesures que ces opérateurs sont amenés à réaliser, contrôler ou utiliser (débits, concentrations, en particulier MES, turbidité) et sur les grandeurs qui en sont dérivées (flux, masse, concentration moyenne ou caractéristique), ce guide explique comment établir une incertitude globale pour une grandeur donnée en tenant compte autant que faire se peut des différentes sources d'incertitude rencontrées dans la chaîne de mesure et leur propagation dans les divers traitements. Cela inclut les conséquences d'erreurs provenant de l'instrument de mesure, de l'environnement, du protocole expérimental ainsi que de la variabilité du phénomène physique étudié.

Les concentrations et les flux polluants sont traités à partir de l'exemple des matières en suspension, qui est particulièrement intéressant puisque la mesure de ce paramètre peut être soit directe, par analyse sur des échantillons, soit indirecte et en continu. Cet exemple peut être transposé, pour l'un ou l'autre de ces aspects, à la plupart des paramètres de pollution.

Afin de mettre en œuvre les conseils et méthodes présentés ici, il est recommandé de satisfaire les pré-requis suivants :

- Disposer de compétences techniques en assainissement
- Avoir une bonne expérience de la métrologie en réseau d'assainissement (hauteur et débit par exemple) et en laboratoire (concentration)
- Avoir des notions de statistiques (calcul de moyenne, d'écart-type, calcul de corrélation, propriétés d'une distribution normale...)
- Avoir une pratique minimum d'un tableur de calcul (compatible avec Excel©) afin de pouvoir utiliser les outils informatiques fournis avec le guide.

1.3 Structure du document

Ce guide est structuré en 4 chapitres.

Le premier porte sur les notions de base à connaître pour se lancer dans une analyse d'incertitudes. Elle comprend les définitions des concepts utilisés et les différentes étapes à suivre pour mener à bien les processus d'estimation de l'incertitude sur le résultat d'un mesurage.

Le deuxième chapitre synthétise des informations générales sur l'identification et à la quantification des incertitudes sur les mesurands primaires directement issus des instruments de mesure ou des méthodes d'analyse: hauteur d'eau, vitesse, concentration, turbidité.

Le troisième chapitre détaille la méthode de propagation des incertitudes en l'appliquant à des grandeurs dérivées instantanées : vitesse moyenne dans une section et débit, concentration moyenne dans une section et flux.

Enfin le quatrième chapitre apporte une contribution originale, consacrée spécifiquement aux mesures en continu, et aux grandeurs dérivées obtenues par intégration et flux sur une durée (événement, année). Il met en particulier l'accent sur l'importance des hypothèses faites sur le caractère aléatoire ou systématique des erreurs.

Les définitions et méthodes présentées ici sont illustrées d'exemples issus de l'assainissement et complétés par des outils informatiques facilitant les calculs (Excel®).

2 NOTIONS DE BASE

2.1 *Cadre normatif*

Les concepts et le vocabulaire associés à l'incertitude, mais aussi les méthodes pour parvenir à son estimation, sont définis précisément à travers des documents de référence. Nous présentons ici les 4 textes normatifs principaux qui ont inspiré ce guide et qui peuvent être utilisés dans le cadre de mesure de concentrations et de flux polluants en réseau d'assainissement. On pourra d'ailleurs s'y reporter pour obtenir des informations complémentaires à ce qui est écrit par la suite.

- NF ISO/CEI GUIDE 98-3 (X07-040-3) : Évaluation des données de mesure — Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (GUM), www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_F.pdf

C'est le document de référence utilisé dans tous les domaines de la métrologie ou d'essais pour l'estimation des incertitudes de mesure. Il décrit en détails l'approche analytique d'estimation et de composition des incertitudes présentée plus loin. Il a été complété par une approche alternative de type Monte Carlo dans sa version de 2011.

- NF ISO/CEI GUIDE 99:201108 (X07-001) : Vocabulaire international de métrologie — Concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM), www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_200_2008.pdf

C'est le dictionnaire officiel de la métrologie dans lequel on retrouve les définitions précises et normatives de tout le vocabulaire utilisé –entre autres- pour la définition et la quantification des incertitudes.

- NF XP T90-220 (2003) : Protocole d'estimation de l'incertitude de mesure associée à un résultat d'analyse pour les méthodes d'analyse physico-chimiques.

C'est une norme française relative à la qualité de l'eau qui est très utilisée par les laboratoires français pour l'estimation de l'incertitude de mesure associée à un résultat d'une méthode d'analyse de l'eau. Elle propose 4 méthodes d'estimation de l'incertitude (Approche type GUM, contrôle interne, plan spécifique, reproductibilité inter-laboratoire).

- NF ISO 11352 (Février 2013) : Qualité de l'eau - Estimation de l'incertitude de mesure basée sur des données de validation et de contrôle qualité

Elle spécifie des méthodes pour l'estimation de l'incertitude de mesure des méthodes chimiques et physicochimiques dans des laboratoires individuels, basée sur des données de validation et sur les résultats du contrôle qualité analytique obtenus dans le domaine de l'analyse de l'eau.

2.2 *Concepts fondamentaux et définitions*

L'évaluation des incertitudes résulte d'une modélisation du processus de mesurage et des erreurs qu'il implique. A ce titre, elle s'appuie sur un nombre limité de concepts-clés, qui sont présentés dans cette section. Leurs définitions sont issues du

VIM (Vocabulaire International de métrologie, **NFX 07-001**), cité en italiques entre guillemets. Ces définitions sont commentées et complétées (entre crochets à l'intérieur des citations) pour les applications spécifiques visées par ce guide. Ces concepts sont présentés dans la perspective spécifique de ce guide consacré pour l'essentiel à des mesures *in situ* et dites « en continu » de paramètres hydrologiques. Les définitions de base ont donc été complétées par quelques éléments spécifiques à ce guide, concernant essentiellement la distinction entre mesurandes primaires, grandeurs dérivées et grandeurs intégrées.

La lecture attentive de cette section est un préalable indispensable avant d'aborder les sections suivantes.

Grandeur : « *propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence* ». Pour ce qui concerne ce guide, la référence en question sera l'unité utilisée pour quantifier cette grandeur.

Mesurande : « *grandeur que l'on veut mesurer* ». « *La spécification d'un mesurande nécessite la connaissance de la nature de grandeur et la description de l'état du phénomène, du corps ou de la substance dont la grandeur est une propriété, [...]* ». Nous verrons dans la sous-section 2.4.1 que la définition rigoureuse d'un mesurande est une tâche assez complexe et que des incertitudes sont attachées à cette définition.

Dans l'organisation de ce document on distingue deux types de mesurande.

Un **mesurande primaire** est une grandeur qui est mesurée directement ou indirectement par un capteur ou une méthode d'analyse. Il peut être utilisé pour calculer d'autres grandeurs plus adaptées aux objectifs des utilisateurs des résultats de mesure, et qui constituent des **grandeurs dérivées** de ce mesurande primaire. Dans ce sens une hauteur d'eau calculée à partir d'un capteur de pression constitue un mesurande primaire vis à vis du débit (calculé à partir de cette mesure de hauteur et le cas échéant d'une mesure de vitesse).

L'incertitude affectant la mesure d'un mesurande primaire est principalement liée à la technologie et au matériel ou à la méthode de mesure. Elle est assez générique et peut être évaluée à partir de caractéristiques fournies par les constructeurs ou de données publiées dans la littérature.

L'incertitude sur les grandeurs dérivées est plus spécifique à un site et à une mise en œuvre donnée. Elle est évaluée en propageant les incertitudes sur les mesurandes primaires dans les calculs nécessaires pour obtenir les mesurandes dérivés, qui peuvent aussi provenir d'éléments propres au site de mesure (par exemple l'incertitude sur la description géométrique de la section de mesure).

On peut étendre la notion de grandeur dérivée à toute grandeur calculée à partir de données mesurées, par exemple des volumes calculés par intégration d'un débit sur une durée fixe (par exemple une heure) ou variable (par exemple la durée d'un événement pluvieux). Dans ce guide nous avons préféré réserver le terme de grandeurs dérivées à des valeurs instantanées (ou intégrées sur des durées courtes

vis à vis des phénomènes hydrologiques, par exemple quelques secondes ou dizaines de seconde), et parler de **grandeurs intégrées** pour des cumuls ou des moyennes à des échelles de temps supérieures, par exemple des volumes, des masses, des concentrations moyennes événementielles ou annuelles.

Finalement on s'intéressera dans ce document aux incertitudes affectant les grandeurs suivantes :

- Mesurandes primaires : hauteur d'eau $h(t)$, vitesse « locale » (corde et Doppler) $u(t)$, concentration d'un prélèvement (en un paramètre à spécifier) $C_{éch}(t)$, turbidité $T_u(t)$;
- Grandeurs dérivées : vitesse moyenne dans une section $U(t)$, débit instantané $Q(t)$, concentration moyenne à l'aide de prélèvements C_s , turbidité moyenne dans une section T_{us} , concentration à partir de la turbidité C_T , flux (instantané) $\Phi(t)$
- Grandeurs intégrées : concentration moyenne événementielle C_e , volume événementiel V_e , masse événementielle M_e , concentration moyenne inter-événementielle C_{mie} et caractéristique C_{cara} et masse annuelle M_{an} .

Erreur de mesure : « *différence entre la valeur mesurée $[x]$ d'une grandeur $[X]$ et une valeur de référence $[x_0]$ » . Dans le cadre de ce guide, la valeur de référence est la valeur vraie du mesurande x_0 et l'erreur est inconnue. « *Il convient de ne pas confondre l'erreur de mesure avec une erreur de production ou une erreur humaine* ». En effet aucun calcul d'incertitude ne prend en compte les défauts de capteur, les erreurs de paramétrage... qui doivent être éliminées par un processus de validation. *Les estimations d'incertitudes s'appliquent à des valeurs validées !* Dans le cadre de ce guide nous généraliserons cette définition, en considérant que le terme « erreur » se réfère à une variable aléatoire $\varepsilon(x)$ (dont la dispersion est mesurée par l'**incertitude**). Dans certains contextes le terme « erreur » pourra désigner la réalisation de cette variable aléatoire pour un résultat de mesure donnée. On envisage traditionnellement qu'une erreur possède deux composantes, à savoir une composante aléatoire $\varepsilon_{aléa}(x)$ et une composante systématique $\varepsilon_{syst}(x)$.*

$$x = x_0 + \varepsilon(x) = x_0 + \varepsilon_{aléa}(x) + \varepsilon_{syst}(x) \quad \text{Eq. 2-1}$$

Erreur aléatoire : « *composante de l'erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés [expériences de **répétabilité**], varie de façon imprévisible* ». Les erreurs aléatoires sur des valeurs successives sont souvent indépendantes. Cette composante peut alors être réduite en répétant les d'observations dans les mêmes conditions et en faisant la moyenne arithmétique des résultats obtenus.

Condition de répétabilité : « *condition de mesurage dans un ensemble de conditions qui comprennent la même procédure de mesure, les mêmes opérateurs, le même système de mesure, les mêmes conditions de fonctionnement et le même lieu, ainsi que des mesurages répétés sur le même objet ou des objets similaires pendant une courte période de temps* ». Une expérience de répétabilité permet d'évaluer la fidélité de mesure selon un ensemble de conditions de mesurage. Elle consiste par exemple à répéter une mesure de turbidité avec un même appareil sur un même échantillon dans un temps assez court.

Erreur systématique : « *composante de l'erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés, demeure constante ou varie de façon prévisible* ». Elle peut dépendre de *grandeurs d'influence* (par exemple la température) et plus généralement être mise en évidence par des expériences de *reproductibilité*.

A la différence des erreurs aléatoires, les erreurs systématiques affectant un résultat de mesure ne peuvent être réduites en faisant la moyenne des résultats de plusieurs mesurages effectués dans les mêmes conditions : les erreurs obtenues ne seront pas indépendantes et elles se répéteront quasiment à l'identique lors des différents mesurages. Par exemple les erreurs sur la description géométrique d'une section de collecteur (cf. section 4.2) entraînent des erreurs systématiques sur l'évaluation de surfaces mouillées : pour une hauteur d'eau donnée, l'erreur commise sera toujours la même... mais elle est inconnue.

Cependant, on peut dans certains cas corriger une erreur systématique, en particulier si elle est due à un *facteur d'influence* dont l'effet est connu (comme la température). Mais aucune correction n'est parfaite et il subsiste toujours une erreur systématique résiduelle. Ainsi, les instruments de mesure sont souvent ajustés ou étalonnés par utilisation d'étalons (voir plus loin) pour éliminer des effets systématiques liés par exemple à un décalage de zéro ou de pente ou à une non-linéarité. Cependant, la courbe d'étalonnage ne s'ajuste jamais parfaitement sur les points, et les écarts résiduels par rapport à la courbe d'étalonnage peuvent correspondre à des erreurs systématiques non corrigées (si l'incertitude sur les étalons est négligeable et si ces écarts sont répétables).

Pour la mesure de grandeurs qui évoluent dans le temps, la notion d'erreur systématique désignera dans ce guide une erreur constante dans une gamme de variation limitée, telle que celle qui est couverte par plusieurs enregistrements successifs. Elle n'est pas nécessairement constante sur toute la gamme de mesure, et les erreurs sur les fortes valeurs mesurées peuvent dans certains cas compenser en partie celles qui sont commises sur les faibles valeurs ou sur les valeurs médianes. En pratique il est très délicat d'estimer ce type d'effets et ils ne sont pas pris en compte, ce qui va dans le sens de la prudence : les évaluations d'incertitudes correspondantes sont plutôt surestimées.

Pour conclure, il faut souligner que le caractère aléatoire ou systématique d'une source d'erreurs n'est pas absolu : la plupart des sources d'erreurs intègrent les deux types de composantes, mais on s'efforcera dans ce guide de caractériser les erreurs par leur composante dominante.

Condition de reproductibilité : « *condition de mesurage dans un ensemble de conditions qui comprennent des lieux, des opérateurs et des systèmes de mesure différents, ainsi que des mesurages répétés sur le même objet ou des objets similaires* ». Il y a de nombreuses expériences de reproductibilité possibles pour un mesurage donné, en fonction des facteurs ou des combinaisons de facteurs que l'on fait varier. Les essais inter-laboratoires sont des expériences de reproductibilité pour les mesurages de concentration en divers composés (et dans le cadre de ce guide des MES).

Grandeur d'influence : « *grandeur qui, lors d'un mesurage direct, n'a pas d'effet sur la grandeur effectivement mesurée, mais a un effet sur la relation entre l'indication et le résultat de mesure. Cette notion peut s'appliquer non seulement aux grandeurs qui ont un effet sur le système de mesure, mais aussi celles qui ont un effet sur les grandeurs effectivement mesurées.* » En assainissement, la température influence souvent le processus en modifiant les propriétés de l'eau ou de l'air (masse volumique et célérité du son), ainsi que le fonctionnement des capteurs et de l'électronique associée.

Incertitude de mesure : « *paramètre non négatif qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées à un mesurande, à partir des informations utilisées* ». L'incertitude de mesure comprend des composantes provenant d'effets aléatoires ou systématiques.

Dans ce guide nous préférons considérer que l'incertitude caractérise la distribution des erreurs (plutôt que des valeurs attribuées au mesurande), ce qui permet de préciser les sens respectifs des deux termes « erreur » et « incertitude » : l'erreur est une variable aléatoire dont la réalisation pour un résultat de mesure donné ne peut pas être connu (sinon elle serait corrigée). L'incertitude est un paramètre caractérisant la distribution des erreurs. Dans l'absolu la valeur de ce paramètre n'est pas connue avec précision mais peut être évaluée (avec une certaine incertitude... mais cet aspect est en général négligé et on se contente d'un majorant).

Les deux définitions de l'incertitude sont en fait équivalentes, comme l'illustrent les figures suivantes.

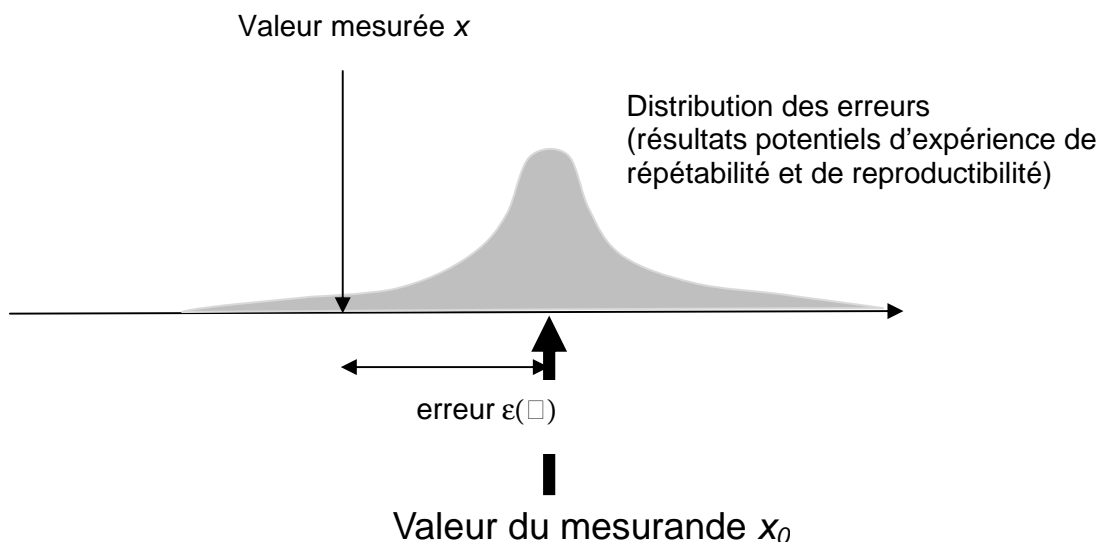


Figure 1 : Processus de mesure : passage d'une valeur de mesurande à une valeur mesurée entachée d'erreur

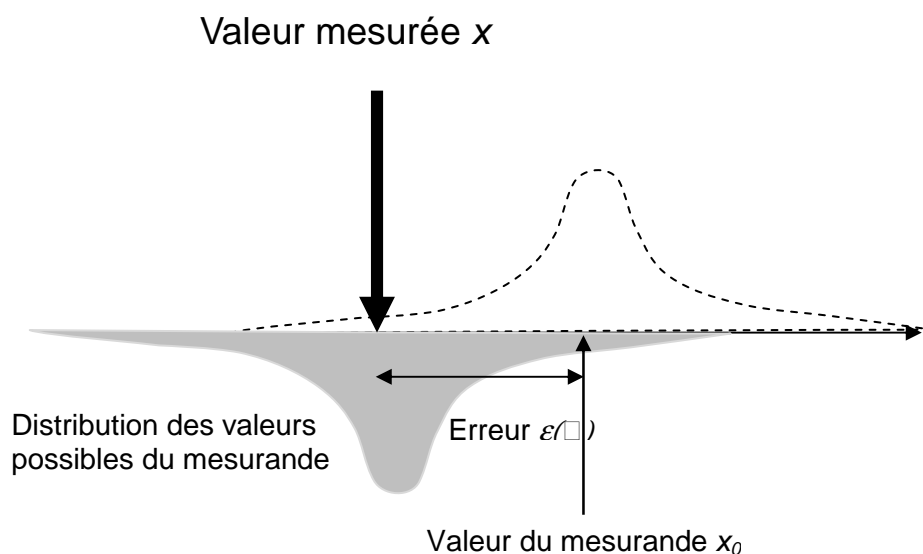


Figure 2 : Inversion du processus de mesure : attribution d'un ensemble de valeurs possibles au mesurande à partir d'un résultat de mesure

L'incertitude peut être exprimée à l'aide d'un écart-type, appelé **incertitude-type** (et notée $u(x)$), qui prend en compte les erreurs systématiques et aléatoires. C'est cette notation que nous avons choisi d'employer dans ce guide. Elle peut être exprimée en valeur relative (% du résultat de mesure) ou en valeur absolue. En réalité, l'incertitude-type correspond à l'écart-type des erreurs $\varepsilon(x)$: $u(x)=u(\varepsilon(x))$ pour un mesurande x fixe (condition de **reproductibilité**).

Un **intervalle de confiance** est associé à une probabilité (ou niveau de confiance) donnée de contenir la valeur vraie. Le niveau de confiance $(1-\alpha)$ est exprimé en %, usuellement 95%, α représente le risque, non nul, que la valeur vraie se trouve en dehors de l'intervalle de confiance. L'intervalle de confiance est indicateur plus directement représentatif de la gamme des erreurs possibles que l'incertitude type. En effet dans le cas d'une distribution normale des erreurs, l'incertitude-type ne correspond qu'à un intervalle de confiance à 68%.

En pratique l'intervalle de confiance est centré sur le résultat de mesure, et caractérisé par sa demi-largeur appelée **incertitude élargie** et notée $U(x)$.

On obtient donc une estimation de la valeur vraie x_0 à l'aide de la mesure x et d'une incertitude de plus ou moins $U(x)$ au niveau de confiance de $(1-\alpha)$ % :

$$x_0 = x \pm U(x) \quad \text{Eq. 2-2}$$

Incetitude élargie (norme NFX 07-001) : « produit d'une incertitude-type composée et d'un facteur supérieur au nombre 1 ». Ce facteur k (appelé facteur d'élargissement) dépend « du type de la loi de probabilité de la grandeur de sortie dans un modèle de mesure et de la probabilité de couverture choisie », soit de l'intervalle de confiance au niveau de confiance $1-\alpha$:

$$U(x) = k \times u(x) \quad \text{Eq. 2-3}$$

2.3 Définitions complémentaires

Mesurage : « processus consistant à obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur ». Le terme « mesurage » est censé être moins ambigu que celui de « mesure », qui désigne à la fois l'action de mesurer et son résultat...

Méthode de mesure : « description générique de l'organisation logique des opérations mises en œuvre dans un mesurage ». Les méthodes de mesure peuvent être qualifiées de directes (si le mesurande est déterminé par lecture directe de la déviation de l'appareil de mesure considéré) ou d'indirectes (si le mesurande est déterminé par l'intermédiaire d'une expression mathématique faisant intervenir plusieurs grandeurs mesurées).

Modèle de mesure : « relation mathématique entre toutes les grandeurs qui interviennent dans un mesurage ». La forme générale que prend un modèle de mesure est la suivante :

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{Eq. 2-4}$$

Où Y est la grandeur (dérivée ou intégrée) de sortie du modèle de mesure, et dont la valeur doit être déduite de l'information sur les grandeurs d'entrée (mesurandes primaires : X_1, X_2, \dots, X_n), combinées à l'aide de la relation fonctionnelle f.

Incertitude-type composé u_c : « incertitude-type obtenue en utilisant les incertitudes-types individuelles associées aux grandeurs d'entrée (mesurandes primaires) dans un modèle de mesure » définissant des grandeurs dérivées ou intégrées. Elle est égale à la racine carrée d'une somme de variances et covariances des grandeurs d'entrée dans le modèle de mesure, pondérées par des coefficients de sensibilité : cf. méthode de propagation des incertitudes (voir sous-section 2.4.5).

Résolution : « plus petite variation de la grandeur mesurée qui produit une variation perceptible de l'indication correspondante ». A l'intérieur de cet intervalle, il n'est pas possible de déterminer la valeur exacte du mesurande. Cela est responsable d'une incertitude intrinsèque à l'appareil de mesure.

Étalon : « réalisation de la définition d'une grandeur donnée, avec une valeur déterminée et une incertitude de mesure associée, utilisée comme référence ». Un étalon sert souvent de référence dans l'obtention de valeurs mesurées et d'incertitudes de mesure associées, établissant ainsi une traçabilité métrologique par l'intermédiaire de l'étalonnage d'autres étalons, instruments de mesure ou systèmes de mesure.

Étalonnage : « opération qui, dans des conditions spécifiées, établit en une première étape une relation entre les valeurs et les incertitudes de mesure associées qui sont fournies par des étalons et les indications correspondantes avec les incertitudes associées, puis utilise en une seconde étape cette information pour établir une

relation permettant d'obtenir un résultat de mesure à partir d'une indication ». L'étalonnage consiste à établir une relation entre les valeurs indiquées par l'appareil de mesure et les valeurs correspondantes données par des étalons dont l'incertitude est connue. Cette opération permet d'établir une courbe d'étalonnage et de déterminer une part de l'incertitude de mesure (incertitude d'étalonnage). Dans le cas de la mesure de turbidité par exemple, la courbe d'étalonnage (souvent un polynôme d'ordre 1, 2 ou 3) est calée à l'aide de plusieurs solutions étalons représentatives de la gamme de mesure (5 au minimum en plus du 0, par exemple: 0, 100, 200, 500, 1 000, 2 000 FAU (Formazin Attenuation Unit) ou 0, 50, 100, 250, 500, 1 000 FNU (Formazin Nephelometric Unit)).

Ajustage : « ensemble d'opérations réalisées sur un système de mesure pour qu'il fournisse des indications prescrites correspondant à des valeurs données des grandeurs à mesurer ». Parmi les différents types d'ajustage se trouvent le réglage de zéro (offset), le réglage de décalage ou le réglage d'étendue (gain).

Réglage (de zéro) : « ajustage d'un système de mesure pour que le système fournisse une indication égale à zéro correspondant à une valeur égale à zéro de la grandeur à mesurer ». Manipulation effectuée au niveau de l'appareil afin de supprimer les erreurs systématiques de mesure.

Exemple sur la mesure de hauteur d'eau à l'aide d'un appareil à ultrasons:

Ici le mesurande est la distance entre une surface libre et un point de référence, par exemple situé sur le radier d'une canalisation. Dans le cas d'un mesurage par ultrasons, la méthode de mesure correspond à la propagation d'ondes ultrasonores qui se réfléchissent à la surface de l'eau vers le capteur (posé au radier) qui fonctionne alors comme un récepteur. Connaissant la distance qui sépare le capteur du fond de la section de mesure, ainsi que la célérité du son dans l'air, la mesure du temps mis par l'onde pour effectuer un aller-retour permet d'estimer la hauteur d'eau. Pour ce type de mesure, la température peut apparaître comme une grandeur d'influence car elle agit sur la célérité du son et donc sur le temps de propagation. L'erreur de mesure correspond à la différence entre la mesure et la valeur vraie de la hauteur d'eau supposée stable. L'erreur systématique provient par exemple du repérage de la position du capteur par rapport au radier, ou d'une influence de la température non totalement corrigée, tandis que l'erreur aléatoire peut provenir d'ondulations à la surface de l'eau ou de petites fluctuations de stabilité des circuits électroniques. A ces sources d'incertitude, on peut aussi ajouter celle due à l'étalonnage du capteur.

2.4 Processus d'estimation de l'incertitude sur le résultat d'un mesurage

Ce guide s'appuie sur l'approche proposée par le GUM (NF X07-040-3) qui s'organise en huit étapes :

- Etape 1 : Exprimer mathématiquement le modèle de mesure entre le mesurande Y et les grandeurs d'entrée X_i défini par une fonction $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_n)$;

- Etape 2 : Déterminer x_i , la valeur estimée de la grandeur d'entrée X_i , soit sur la base de l'analyse statistique de séries d'observations (la moyenne), soit par d'autres moyens (valeurs références) ;
- Etape 3 : Evaluer l'incertitude-type $u(x_i)$ de chaque estimation x_i , soit par des méthodes de type A (méthodes statistiques), soit par des méthodes de type B (autres méthodes) ;
- Etape 4 : Evaluer les covariances associées à toutes les estimations d'entrée qui sont corrélées $u(x_i, x_j)$;
- Etape 5 : Calculer le résultat du mesurage, c'est-à-dire l'estimation y du mesurande Y , à partir de la relation fonctionnelle f en utilisant pour les grandeurs d'entrée X_i , les estimations x_i obtenues à l'étape 2 ;
- Etape 6 : Déterminer l'incertitude-type composée $u_c(y)$ du résultat de mesure y à partir des incertitudes-types et des covariances associées aux estimations d'entrée ;
- Etape 7 : S'il est nécessaire de fournir une incertitude élargie U pour déterminer un intervalle de confiance $y \pm U$, multiplier l'incertitude-type composée de $u_c(y)$ par un facteur d'élargissement k : $U = k \cdot u_c(y)$;
- Etape 8 : Synthétiser dans un rapport le résultat du mesurage y avec son incertitude-type composée $u_c(y)$ ou son incertitude élargie U .

Ces 8 étapes décrites par le GUM, doivent en réalité être complétées par deux tâches plus qualitatives: la définition du mesurande et l'analyse du processus de mesure.

En simplifiant et en complétant la méthodologie proposée par le GUM, nous avons adopté dans ce guide la décomposition suivante:

- Phase 1 : Spécification du mesurande;
- Phase 2 : Identification des sources d'incertitude (analyse du processus de mesure & GUM1)
- Phase 3 : Détermination de la structure des erreurs (analyse du processus de mesure & GUM4) ;
- Phase 4 : Quantification des composantes de l'incertitude (GUM2, 3 et 5) ;
- Phase 5 : Calcul de l'incertitude composée (GUM6) ;
- Phase 6 : Compte rendu de l'incertitude (GUM7 et 8).

Ces 6 phases sont détaillées dans les sous-sections suivantes.

2.4.1 Phase 1 : Spécification du mesurande

Au regard de la définition donnée précédemment pour le mesurande, il est nécessaire de décrire précisément la grandeur à mesurer. Autrement dit, il faut préciser les conditions de travail et les valeurs de référence des grandeurs d'influence sur le mesurande spécifié. En toute rigueur il faudrait donner une infinité de détails pour définir sans ambiguïté un mesurande. C'est pour limiter autant que faire se peut cet univers des possibles que le VIM introduit la notion d'incertitude définitionnelle (équivalent à l'incertitude intrinsèque dans le GUM) qui représente la « *composante de l'incertitude de mesure qui résulte de la quantité finie de détails dans la définition d'un mesurande* ».

Exemple : la définition d'une hauteur d'eau peut sembler simple, mais nécessiterait de spécifier avec une grande précision la position en plan (X_0, Y_0) à laquelle correspond cette hauteur d'eau, ainsi que la cote Z_0 par rapport à laquelle elle est calculée, et en toute rigueur la direction de la verticale au point X_0, Y_0 ! Quant à la notion même de surface libre, elle devient quelque peu évanescente si on descend jusqu'à l'échelle moléculaire...

En restant à l'échelle macroscopique, la hauteur d'eau d'un écoulement est variable dans le temps, et il convient de spécifier les échelles de temps significatives vis à vis de l'application considérée : certaines variations ne portent pas d'information utiles et sont considérées comme du bruit (par exemples les vaguelettes) : des mesures répétées à un intervalle de temps court (1s) feront apparaître des fluctuations, qui peuvent être interprétées comme des erreurs de répétabilité bien qu'elles correspondent à des variations réelles (vagues, ondulations...) du milieu sur lequel porte le mesurage.

La hauteur d'eau en un point est souvent mesurée pour calculer une surface mouillée. Elle est alors considérée comme représentative de la cote de la surface libre assimilée localement à un plan horizontal. Des mesures réalisées à un instant donné sur différents points d'une transversale feraient apparaître des petites fluctuations dans l'espace qui pourraient être considérées comme des erreurs de répétabilité.

L'incertitude définitionnelle sur la hauteur de la surface libre correspondra à la précision limitée de la définition de X_0, Y_0 et Z_0 , ainsi qu'aux variations de cote de la surface libre dans l'espace et dans le temps (vagues, effets centrifuges...).

La spécification d'un mesurande nécessite donc souvent de préciser des valeurs de référence pour les grandeurs d'influence. Ainsi une mesure de hauteur d'eau utilisée pour calculer un débit puis un volume devrait en toute rigueur spécifier la température si ces volumes doivent participer à des bilans : la conservation des volumes n'est valable que pour une température donnée. Si on ne spécifie pas la température, la gamme de variations de celle-ci définira une composante de l'incertitude définitionnelle.

L'incertitude définitionnelle n'est pas toujours négligeable : sur les mesures de vitesse et de turbidité par exemple, on observe couramment des fluctuations rapides, dont on a tout lieu de penser qu'elles correspondent à des réalités physiques, liées à la turbulence et à l'hétérogénéité du milieu. Néanmoins elles ne portent pas d'informations utiles à l'application visée et à ce titre se comportent comme du bruit vis à vis du signal constitué par un mesurande qui serait à préciser. Ces fluctuations sont parfois désignées comme « erreurs expérimentales », et peuvent être considérées comme une manifestation de l'incertitude définitionnelle.

Une partie de l'incertitude définitionnelle pourrait être supprimée en définissant le mesurande comme une valeur moyenne. Par exemple dans le cas de la hauteur d'eau on peut définir le mesurande comme la cote de la surface libre moyennée dans l'espace sur une transversale précise, et moyennée dans le temps sur une durée de quelques secondes (pour filtrer les fluctuations non significatives). L'incertitude

définitionnelle disparaît en tant que telle (le mesurande est bien défini) mais elle réapparaît sous forme d'une **incertitude d'échantillonnage** (le résultat du mesurage n'est qu'une estimation de la valeur moyenne à partir un échantillon). En pratique la définition d'un mesurande primaire comme une valeur moyenne n'est pas très courante, et l'incertitude d'échantillonnage n'est pas spécifiquement évoquée dans le GUM.

Pour ce guide on s'en tiendra à la définition d'un mesurande comme une valeur locale et instantanée, affectée d'incertitude définitionnelle, au moins pour les mesurandes primaires et les grandeurs dérivées.

2.4.2 Phase 2 : Identification des sources d'incertitude

Une liste détaillée des sources significatives d'incertitude devra être dressée en partant de la relation fonctionnelle f du modèle de mesure. Il est important de souligner que d'autres sources d'incertitude qui n'apparaissent pas explicitement dans la relation f mais qui affectent les résultats de mesurande peuvent exister (la température par exemple). Une fois établie, cette liste doit permettre d'avoir une vision claire de ce qui doit être pris en compte dans le calcul d'incertitude.

Il existe dans la pratique de nombreuses sources d'incertitudes dans un mesurage, comprenant :

- Définition incomplète du mesurande ;
- Représentativité imparfaite de l'échantillonnage spatial réalisé par un capteur *in situ* ;
- Connaissance insuffisante des effets des conditions d'environnement sur le mesurage ;
- Effets dus à l'opérateur, en particulier pour les analyses de laboratoire, mais aussi pour certains prélèvements in situ
- Caractéristiques de l'instrument de mesure ;
- Valeurs inexactes des étalons ;
- Valeurs inexactes des constantes et d'autres paramètres obtenus de sources extérieures (transfert d'une relation MES/turbidité issue d'un autre site par exemple) ;
- Approximations et hypothèses introduites dans la méthode de mesure ;
- Etc...

Notons que ces sources d'incertitude ne sont pas nécessairement indépendantes. Dans le cas contraire, il faut étudier les possibles corrélations qui les relient (voir sous-section 2.4.3).

Une méthode pratique permettant de lister les différentes sources d'incertitude est le diagramme cause-effet proposé par Kaoru Ishikawa, appelé aussi diagramme de « 5M ». L'idée est de structurer sous forme visuelle les différentes sources d'incertitudes en les regroupant en 5 catégories.

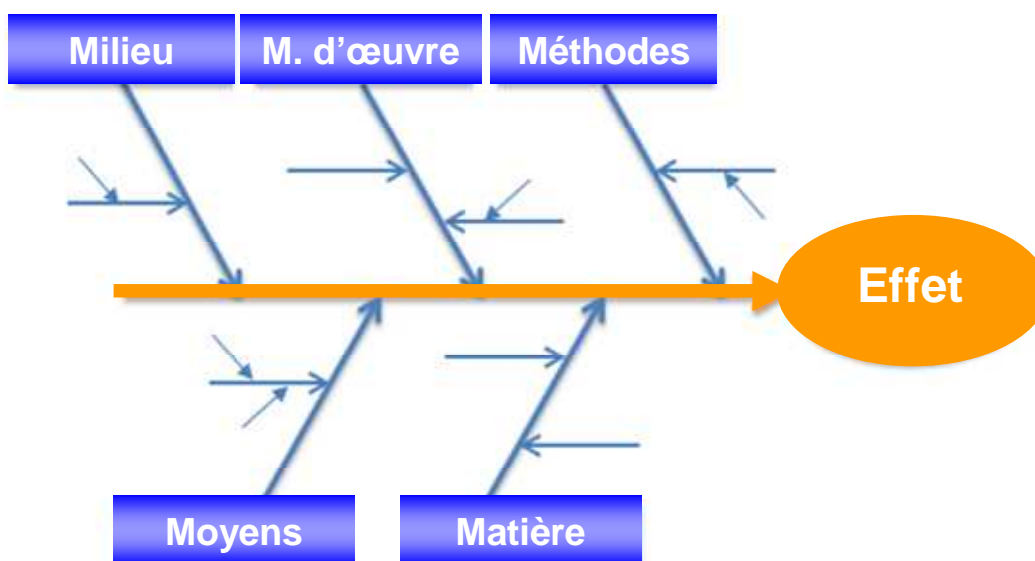


Figure 3 : Diagramme « 5M »

Les 5 M correspondent donc à :

- Matière : les matières et matériaux utilisés et entrant en jeu, par exemple des réactifs ou des solutions étalons, mais aussi les hétérogénéités (spatiale et temporelle) d'échantillon, ainsi que sa stabilité.
- Moyens : l'équipement, les machines, le matériel informatique, les logiciels et les technologies.
- Méthodes : le mode opératoire, la logique du processus, les opérations de calcul, etc.
- Main-d'œuvre : les interventions humaines (expérience de l'opérateur, habileté).
- Milieu : l'environnement (température, hygrométrie, pression...), le positionnement, le contexte.

L'affectation d'une source d'incertitude à l'une ou l'autre des catégories peut parfois sembler subjective et est laissée à l'appréciation de chacun : la méthode 5M n'est qu'une aide pour dresser la liste des sources en évitant d'en omettre. Un exemple pour illustrer la méthode « 5M » est donné ci-dessous.

Après avoir listé les différentes sources d'incertitude, un modèle complet du mesurage qui incorpore tous les paramètres affectant le mesurande doit être établi sous la forme d'une ou plusieurs fonctions (si c'est possible). Il peut s'agir de fonctions décrivant les processus physiques mis en œuvre, ou de modèles empiriques du type régression (estimation des concentrations en MES à partir des mesures de turbidité par exemple).

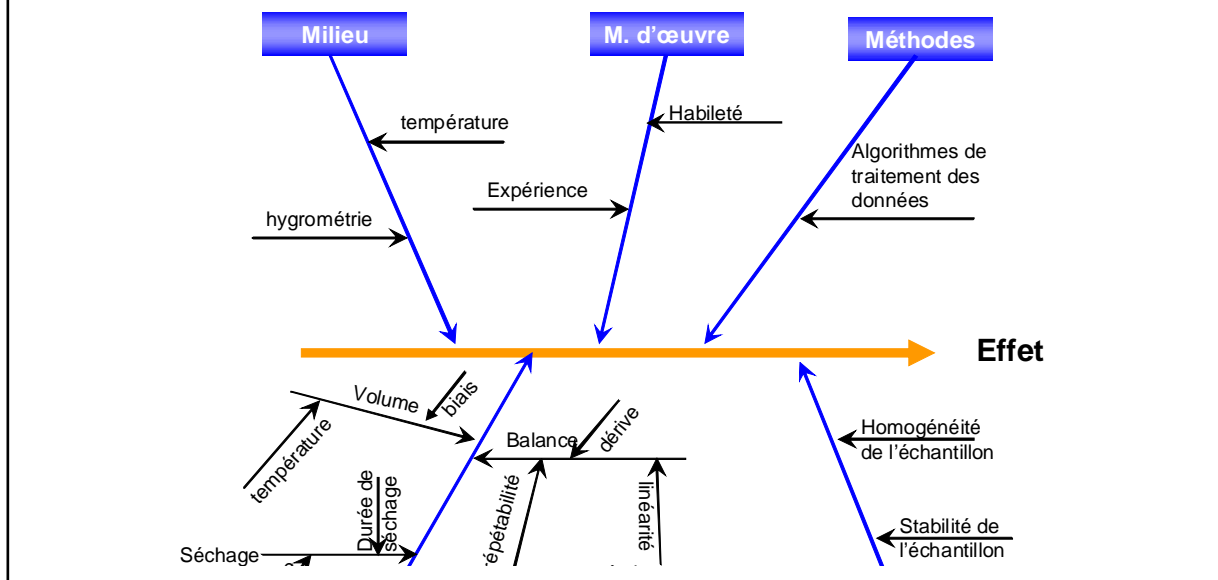
Dans le cas de grandeurs dérivées ou intégrées, il faut tenir compte des incertitudes entourant l'ensemble des mesurandes primaires dont elles dépendent.

Exemple : Concentration en Matières En Suspension (MES) C_a d'un échantillon de volume V obtenue par une analyse labo par filtration sous vide sur une membrane filtrante, puis séchage à 105°C, selon la norme AFNOR NF T 90-105 :

Les 3 grandeurs d'entrée m_1 (masse des MES après séchage à 105°C), m_0 (masse du filtre sans le filtrat) et V (volume de l'échantillon) sont liées à la grandeur de sortie C_a par le modèle de mesure suivant :

$$C_a = f(m_1, m_0, V) = \frac{m_1 - m_0}{V}$$

De nombreuses sources d'erreurs peuvent affecter ces différentes mesures. Elles peuvent être synthétisées à l'aide du diagramme 5M suivant :



2.4.3 Phase 3 : Structures des erreurs (ε_i)

Avant de quantifier les incertitudes élémentaires qui seront propagées dans un modèle de mesure pour obtenir une incertitude composée, il faut caractériser la structure des erreurs qu'elles représentent. Nous entendons par structure :

- l'effet aléatoire ou systématique des erreurs,
- les relations entre les incertitudes et les valeurs mesurées
- la forme de la distribution des erreurs,
- l'éventuelle corrélation de certaines erreurs entre elles.

Nous présentons maintenant ces 4 points plus en détails :

1. L'effet aléatoire ou systématique des erreurs

Comme précisé dans la section 2.1 il faut distinguer les erreurs **aléatoires** des erreurs **systématiques**,

A un instant donné les deux types d'erreurs sont traités comme des variables aléatoires. L'échelle de temps de leurs variations diffère, mais cela n'a aucune conséquence à l'échelle (quasi-)instantanée des mesures, ni sur la manière de mener les calculs.

En revanche pour des *grandeurs intégrées dans le temps*, les d'incertitudes liées aux deux types d'erreur pourront avoir des comportements différents : les incertitudes liées à des erreurs aléatoires seront souvent réduites par l'intégration, car des erreurs aléatoires sur des valeurs successives se compensent *si elles sont indépendantes*. Les erreurs systématiques sur des valeurs successives ne sont quant à elles *jamais indépendantes* : les incertitudes associées se cumuleront lors du processus d'intégration. Ces effets de compensation ou de cumul sont pris en compte dans la méthode de calcul par les termes de covariance d'erreurs.

2. Les relations entre les incertitudes et les valeurs mesurées.

Une incertitude étant attachée à un résultat de mesure donné, elle doit donc être évaluée pour chaque valeur possible des grandeurs d'entrée. On considère souvent que l'incertitude est indépendante de la valeur mesurée, en exprimant par exemple la précision d'un capteur sous la forme « $\lambda\%$ de la pleine échelle ». Cette dernière étant fixée, l'incertitude l'est aussi. Dans d'autres cas, l'incertitude dépend de la valeur mesurée : par exemple une incertitude sur la pente d'une droite d'étalonnage forcée par l'origine induit une incertitude proportionnelle à la valeur mesurée. On peut l'exprimer sous la forme $\lambda\%$ de la valeur mesurée. La précision de certains capteurs combine les deux types d'expression sous la forme $\lambda\%$ de la valeur mesurée, et au minimum λX_0 , X_0 étant une valeur (faible) de la grandeur mesurée. Ces 3 cas de figure sont illustrés sur la Figure 4.

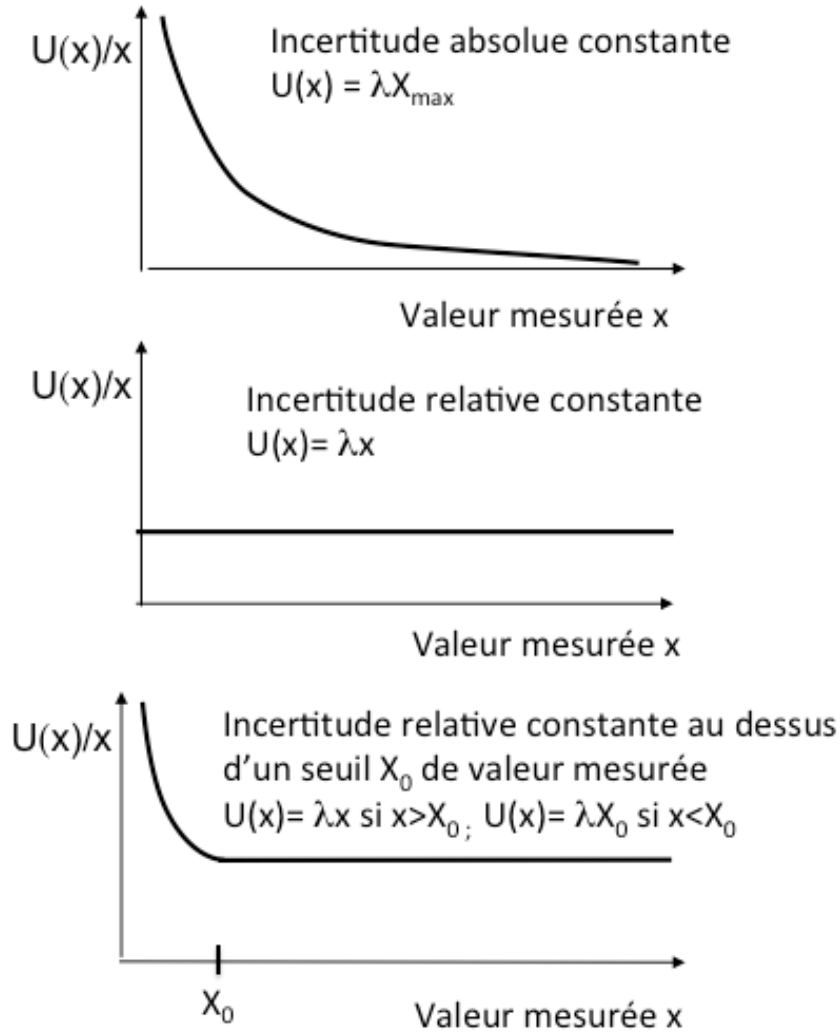


Figure 4 : Différents types de relations entre l'incertitude et la valeur mesurée

3. La forme de la distribution des erreurs

La distribution des erreurs ε_i affectant les grandeurs d'entrée du modèle de mesure est souvent considérée comme suivant une loi normale (ce qui implique la possibilité d'erreurs infinies, et même de résultats de mesure négatifs pour des grandeurs intrinsèquement positives, telles qu'une masse ou un volume...), mais d'autres formes de distribution peuvent être utilisées : uniforme, triangulaire ou lognormale. En réalité, la forme de la distribution est souvent inconnue, en particulier pour les évaluations de type B (voir Phase 4), et elle est posée par hypothèse.

Si les spécifications d'un appareil de mesure sont données sous la forme $\pm a$, en précisant que c'est l'intervalle de confiance à 95 %, on peut postuler que la distribution est normale, avec un écart-type égal à $a/1.96 \approx 0.5 a$.

Si en revanche la spécification $\pm a$ sans préciser de niveau de confiance on peut considérer en absence d'autres informations que la distribution est rectangulaire : toutes les valeurs d'erreurs comprises dans l'intervalle (en l'occurrence un intervalle de confiance à 100%) sont équiprobables. L'écart-

type d'une distribution rectangulaire D'amplitude $2a$ est $a/\sqrt{3} \approx 0.6 a$. Si on préfère considérer que les valeurs extrêmes sont improbables, on peut postuler une distribution triangulaire, d'écart-type $a/\sqrt{6} \approx 0.4 a$.

La forme des distributions des erreurs n'intervient explicitement que pour les calculs de propagation d'incertitudes effectués par la méthode de Monte-Carlo (cf. sous-section 2.4.5). Dans le cas d'une propagation des incertitudes de type analytique, seules les variances –dédites de ces distributions- seront utilisées. Nous avons vu dans l'exemple ci-dessus comment les hypothèses sur la forme de la distribution des erreurs modifient les valeurs d'incertitude-type propagées dans le calcul

4. Corrélation des erreurs entre elles

La corrélation ou l'indépendance des erreurs apparaissent explicitement dans la formule de propagation des incertitudes (cf. sous-section 2.4.5) mais doivent aussi être prises en compte lors de simulations de Monte Carlo. Leur effet n'est pas anodin : des erreurs corrélées positivement se cumulent systématiquement, alors que des erreurs aléatoires compensent en partie leurs effets.

L'encadré ci-dessous précise ces notions de dépendance et d'indépendance et propose des valeurs de référence. Il importe ici de souligner qu'il s'agit de corrélations entre les erreurs, qui sont aussi celles entre des valeurs successives mesurées sur un mesurande fixe (par exemple lors d'expérience de répétabilité ou de reproductibilité). Ce n'est pas la corrélation entre les valeurs successives mesurées sur un mesurande variable. Ainsi les valeurs de hauteur et vitesse mesurées au cours du temps (par exemple toutes les 5 mn) dans une section sont corrélées, mais les erreurs de mesure affectant chaque grandeur (mesurée à l'aide de deux appareils distincts) sont pour l'essentiel indépendantes (sauf celles qui pourraient avoir une origine commune, par exemple dues à des influences mal corrigées de la température).

Inversement, il peut y avoir une corrélation significative entre deux grandeurs d'entrée si on utilise pour leur détermination le même instrument de mesure, le même étalon ou la même donnée de référence. Par exemple, si on étalonne un turbidimètre à partir d'une même solution mère-étalon (c.à.d. que les différents étalons de la gamme d'étalonnage sont constitués à partir de dilutions successives d'une même solution mère), l'erreur entachant la concentration de la solution mère va se propager dans celles des différents étalons-filles et les incertitudes résultantes seront ainsi corrélées.

Covariance des erreurs $u(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$: la covariance est un paramètre statistique qui décrit la distribution conjointe de deux variables aléatoires. Il permet de mesurer le degré de liaison entre les variations de deux grandeurs X_i et X_j . De même que la variance (carré de l'écart-type) permet de décrire les variations d'une variable par rapport à sa moyenne, la covariance va permettre de décrire les variations *simultanées* de deux variables par rapport à leurs moyennes respectives. Deux grandeurs X_i et X_j totalement indépendantes ont une covariance nulle, alors que deux grandeurs corrélées ont une covariance $u(X_i, X_j)$ égale à :

$$u(X_i, X_j) = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j)}{n-1} = r(X_i, X_j) \times u(X_i) \times u(X_j) \quad \text{Eq. 2-5}$$

avec $r(X_i, X_j)$: coefficient de corrélation entre X_i et X_j

Appliquée à des erreurs, la formule de la covariance $u(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ pour n mesures conjointes est la suivante :

$$u(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = r(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \times u(\varepsilon_i) \times u(\varepsilon_j) \quad \text{Eq. 2-6}$$

En pratique, la covariance entre deux erreurs sera évaluée à partir du **coefficient de corrélation** $r(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ entre les deux grandeurs ε_i et ε_j ($-1 \leq r(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq 1$), ainsi que les variances $u(\varepsilon_i)$ et $u(\varepsilon_j)$ égales aux variances des valeurs.

Comme il est difficile de connaître avec précision le coefficient de corrélation entre les erreurs affectant deux grandeurs, on peut se contenter d'utiliser les connaissances dont on dispose sur le processus de mesure pour identifier deux cas extrêmes pour lesquels on va prendre un majorant pour se placer toujours du côté de la sécurité :

1. Si les erreurs sont indépendantes : $r(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$
2. Si les erreurs sont totalement corrélées positivement (ou corrélées négativement) : $r(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 1$ (ou -1).

Il peut arriver qu'un majorant de l'incertitude puisse être obtenu avec $r(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ alors que les erreurs sont corrélées positivement (cf. exemple section 5.9)

Ainsi le calcul de covariance se réduit à un « simple » calcul de variance.

2.4.4 Phase 4 : Quantification des composantes de l'incertitude

Une fois les sources d'incertitudes identifiées (phase 2) et les structures des erreurs associées précisées (phase 3), la phase suivante consiste à quantifier l'incertitude générée par chaque source, pour ensuite les combiner (phase 5) et estimer l'incertitude composée sur le mesurande spécifié.

Cela consiste à déterminer les variances (ou écart-types) et les covariances (ou corrélations) de ces erreurs. Dans ce qui suit, les notations des variances et covariances des erreurs $u(\varepsilon_i)$ et $u(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ sont remplacées par les variances et covariances des valeurs mesurées $u(x_i)$ et $u(x_i, x_j)$ bien que leurs valeurs soient distinctes.

Ce remplacement est parfaitement légitime dans le cas où les x_i et x_j sont fixes. Par contre, dans le cas où les x_i sont des valeurs successives, issues de l'échantillonnage temporel d'une mesurande qui évolue dans le temps, cette assimilation n'est pas possible. Mais les hypothèses faites sur les coefficients de corrélations présentées dans l'encadré précédent permettent les simplifications suivantes :

$$u(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} u(\varepsilon_i) \times u(\varepsilon_j) = u(x_i) \times u(x_j) & \text{si } r(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 1 \\ 0 & \text{si } r(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 2-7}$$

Le GUM distingue deux grands types de méthode pour évaluer les composantes de l'incertitude.

Une **évaluation de type A** est obtenue à partir de séries de mesurages du même mesurande issues d'expériences de répétabilité et de reproductibilité.

Évaluation de type A de l'incertitude : évaluation d'une composante de l'incertitude de mesure par une analyse statistique des valeurs mesurées obtenues dans des conditions définies de mesurage. Il peut s'agir d'expériences de répétabilité, ou même de reproductibilité. Ces dernières sont très lourdes à mettre en place, mais fournissent beaucoup plus d'information. Elles sont d'ailleurs préconisées par la norme NF ISO 11352 pour évaluer les incertitudes sur les analyses au laboratoire.

Dans le cas d'une série de n mesures indépendantes x_i d'une grandeur X , l'incertitude-type est obtenue à l'aide du calcul de l'écart-type expérimental σ_{n-1} :

$$u(x) = \sigma_{n-1}(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad \text{Eq. 2-8}$$

où x_i est le résultat de la mesure i de la grandeur X à mesurer et \bar{x} la moyenne

arithmétique de ces n mesures : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$. Le dénominateur $n-1$ signifie que σ_{n-1} est un estimateur de l'écart-type de la population de la grandeur X (qui est inconnu).

Dans le cas (simple) d'une expérience de répétabilité, l'écart-type expérimental de la moyenne arithmétique $\sigma(\bar{X})$ est utilisé comme estimation de l'incertitude de la moyenne \bar{X} (sous l'hypothèse d'indépendance entre les mesures x_i et qu'ils soient tous issus de la même distribution) :

$$u(\bar{x}) = \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma_{n-1}(X)}{\sqrt{n}} \quad \text{Eq. 2-9}$$

Au final, cette valeur est utilisée comme incertitude-type sur l'estimation de x à partir des n mesures x_i .

Le cas, beaucoup plus complexe, d'une expérience de reproductibilité n'est pas présenté ici.

Une évaluation de type B de l'incertitude est évaluation d'une composante de l'incertitude de mesure par d'autres moyens qu'une évaluation de type A (lorsqu'il est difficile ou impossible de réaliser des mesures répétées). Cette évaluation peut se faire à l'aide de valeurs publiées faisant autorité (issues de la bibliographie par exemple), obtenues à partir d'un certificat d'étalonnage, obtenues à partir de la classe d'exactitude d'un instrument de mesure vérifié, par expérience passée... Toutes ces informations doivent être converties en incertitude-type à partir d'hypothèses sur la forme de la distribution des erreurs (cf. Phase 3, sous-section 2.4.3).

2.4.5 Phase 5 : Calcul de l'incertitude composée

Selon le GUM et son supplément 1, l'incertitude composée peut être évaluée par l'une de deux méthodes suivantes : (i) Méthode analytique (dite formule de propagation des incertitudes), (ii) Méthode Monte Carlo (qui, par analogie avec la méthode précédente, pourrait être qualifiée de propagation des erreurs).

- **Méthode analytique**

On emploie cette méthode lorsque l'incertitude d'un mesurande y est issue de N grandeurs d'entrée x_i liés par une relation mathématique ($y = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)$), où chaque x_i est décrit par une loi de probabilité quelconque (celle-ci n'intervient pas dans les calculs de variance).

Le développement en série de Taylor du premier ordre de f autour des espérances mathématiques de x_i , $E(x_i) = \mu_i$, donne, pour des petites variations de y autour de son espérance μ_y en fonction des petites variations de x_i autour de μ_i (ε_i erreurs sur les x_i) :

$$y - \mu_y = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - \mu_i) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} (\varepsilon_i) \quad \text{Eq. 2-10}$$

où les termes de degré plus élevé sont supposés négligeables et avec $\mu_y = f(\mu_1, \dots, \mu_i, \dots, \mu_N)$.

Le carré de la différence $y - \mu_y$ peut alors s'écrire sous la forme :

$$(y - \mu_y)^2 = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - \mu_i) \right)^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 (x_i - \mu_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \quad \text{Eq. 2-11}$$

L'espérance mathématique du carré de la différence $(y - \mu_y)^2$ correspond à la variance de y , soit $E[(y - \mu_y)^2] = \sigma_y^2$ qui peut ainsi s'écrire :

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \quad \text{Eq. 2-12}$$

Dans cette expression, $\sigma_i^2 = E[(x_i - \mu_i)^2]$ représente la variance de x_i et

$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}(x_i, x_j)}{\sigma_i \sigma_j}$ le coefficient de corrélation de x_i et x_j , où $\text{cov}(x_i, x_j) = E((x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j))$ est la covariance de x_i et x_j .

En utilisant les notations du GUM, l'incertitude composée sur le mesurande y est donnée par les incertitudes relatives $u(x_i)$ à chaque grandeur d'entrée x_i et/ou les

covariances associées à toutes les estimations $u(x_i, x_j)$:

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \quad \text{Eq. 2-13}$$

Si l'on tient compte des corrélations des erreurs.

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) \quad \text{Eq. 2-14}$$

Sans corrélation des erreurs.

Cette méthode nécessite la dérivation du modèle de mesure par rapport à chacune de ses variables afin d'en estimer les coefficients de sensibilité $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, ce qui peut s'avérer fastidieux. Un site tel que : <http://www.wolframalpha.com/> peut faciliter le calcul de dérivées partielles.

On peut aussi estimer numériquement la dérivée partielle de f par rapport à x_i au voisinage de son estimation x_i par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_N) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)}{\Delta x_i} \quad \text{Eq. 2-15}$$

avec Δx_i un écart très faible par rapport à x_i .

Dans le cas où l'on ne tient pas compte des corrélations, différents cas classiques de la fonction f peuvent être rencontrés :

1. impliquant uniquement des sommes : $y = \sum_{i=1}^n x_i$.

$u_c(y)$ est donné par :

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N u^2(x_i)} \quad \text{Eq. 2-16}$$

2. impliquant uniquement des produits ou des quotients : $y = \prod_{i=1}^N x_i^{\alpha_i}$.

$u_c(y)$ est donné par :

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\alpha_i \frac{u(x_i)}{x_i} \right)^2} \quad \text{Eq. 2-17}$$

A ce niveau, il peut être utile d'analyser les importances relatives de chaque composante de l'incertitude. Pour cela, on peut définir des coefficients de

contribution relative : $R_i \approx \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}{u^2(y)} \times 100 \quad \text{Eq. 2-18}$

$$\text{et : } R_j \approx \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)}{u^2(y)} \times 100 \quad \text{Eq. 2-19}$$

Il s'agit de la contribution propre de la variance d'erreur (carré de l'incertitude-type) sur x_i dans la variance d'erreur totale, et de la contribution conjointe des incertitudes-types sur x_i et x_j . Ce calcul des importances relatives est un outil utile pour identifier les sources d'incertitudes sur lesquels on peut le cas échéant agir pour réduire l'incertitude globale.

Exemple : Concentration en Matières En Suspension (MES) C_a d'un échantillon de volume V obtenue par une analyse labo par filtration sous vide sur une membrane filtrante, puis séchage à 105°C, selon la norme AFNOR NF T 90-105 (suite de l'exemple débuté en sous-section 2.4.2)

$$C_a = f(m_1, m_0, V) = \frac{m_1 - m_0}{V}$$

Au regard du modèle de mesure, on peut supposer que l'incertitude sur la grandeur de sortie C_a est due uniquement aux incertitudes de mesures sur m_1 , m_0 et V et on néglige les incertitudes dues aux autres effets.

Les incertitudes sur les masses m_1 et m_0 peuvent être corrélées si la balance présente une dérive (erreur systématique). Ces deux masses peuvent alors être surestimées ou sous-estimées. Par contre, il n'y a aucune raison pour que les erreurs sur les grandeurs m_1 et m_0 soient corrélées avec celles issues de la mesure du volume V .

Les dérivées partielles de f par rapports aux grandeurs d'entrée sont :

$$\frac{\partial f}{\partial m_1} = \frac{1}{V}; \quad \frac{\partial f}{\partial m_0} = -\frac{1}{V} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial V} = -\frac{m_1 - m_0}{V^2}$$

L'expression de l'incertitude composée devient donc :

$$u^2(C_a) = \left(\frac{1}{V}\right)^2 (u^2(m_1) + u^2(m_0)) + \left(\frac{m_1 - m_0}{V^2}\right)^2 u^2(V) - 2\left(\frac{1}{V}\right)^2 u(m_1, m_0)$$

• Méthode de Monte Carlo

La méthode analytique peut conduire à des calculs très complexes, et présente en outre des limites intrinsèques :

1. elle nécessite un modèle de mesure explicite, qui peut ne pas être toujours disponible. C'est le cas lorsque le modèle existe seulement sous forme algorithmique qui doit être évalué numériquement (exemple : établissement d'une relation polynomiale inverse de degré supérieur ou égal à 3).
2. elle est basée sur une approximation linéaire (développement limité) qui n'est valable que si les erreurs sont petites devant la valeur mesurée.

3. elle propage des variances. La conversion de ces variances en intervalle de confiance nécessite des hypothèses sur la distribution des erreurs composées, en général considérée comme normale.

Pour pallier ces limitations le supplément 1 du GUM publié en 2008 propose une procédure dite de Monte Carlo qui tend à devenir la méthode de référence. C'est une méthode basée sur la simulation numérique du processus de mesure qui permet de propager non pas uniquement la variance, mais les distributions d'erreurs affectant les variables d'entrée afin d'obtenir la distribution d'erreurs associée au mesurande. Cette distribution est ensuite analysée pour caractériser l'incertitude composée.

Pour ce qui concerne la phase 5, cette procédure comporte les deux étapes suivantes :

- Utiliser la distribution statistique des erreurs définie en phase 3 pour chacune des N grandeurs x_i et pour générer M réalisations de chaque grandeur d'entrée par tirages aléatoires dans leurs distributions respectives. Une valeur conséquente de réalisations est recommandée ($M=10^6$). Dans le cas de variables corrélées il faut définir leur distribution conjointe (transformation de Nataf, voir Annexe I p. 453 dans Hannouche, 2012).
- Appliquer à chaque réalisation des grandeurs d'entrée les transformations représentant le processus de mesure pour obtenir M valeurs de la grandeur de sortie y et construire la distribution empirique du mesurande.

Elle nécessite par ailleurs des aménagements des phases 2 (le modèle de mesure ne prend pas nécessairement la forme de fonctions, mais peut intégrer des algorithmes), 3 (forme de distributions des erreurs) et 6 (analyse de la distribution pour identifier un intervalle de confiance).

La Figure 5 ci-dessous permet de comparer l'approche analytique et celle de Monte Carlo et leur intégration dans la démarche présentée au début de cette section 2.4 :

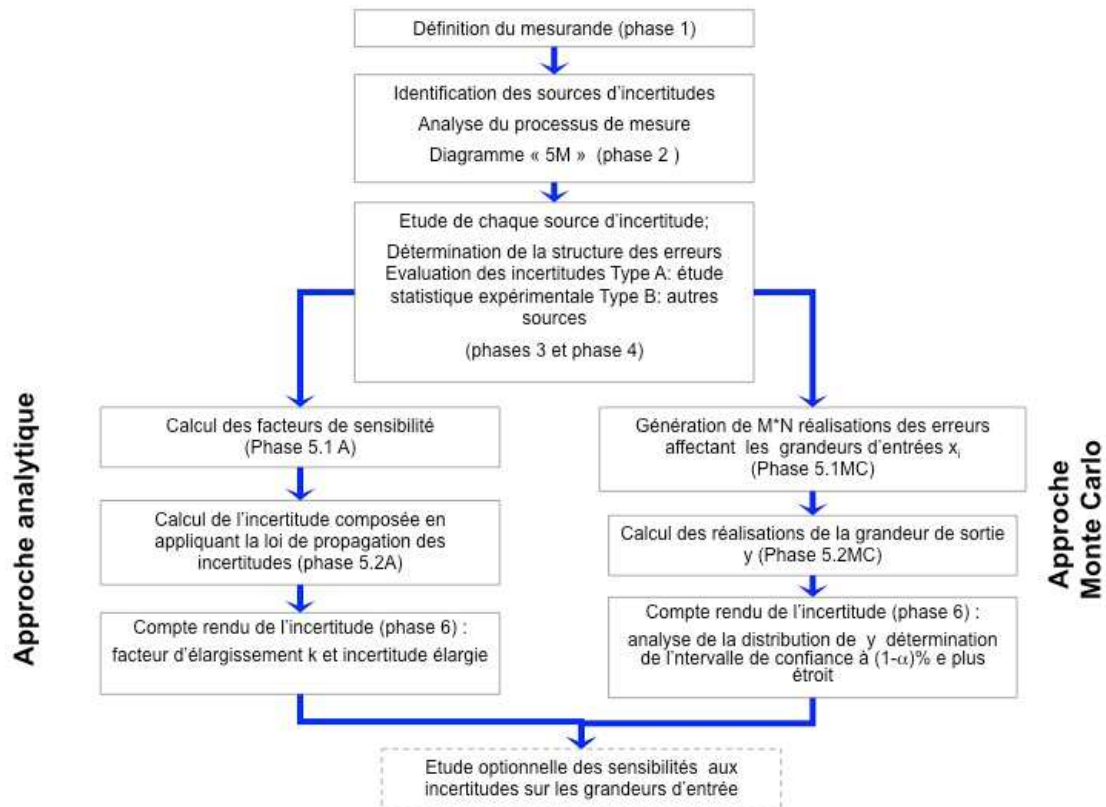


Figure 5 : Insertion de la méthode analytique et de celle de Monte Carlo dans la démarche générale d'évaluation des incertitudes.

La méthode de Monte Carlo a tendance à devenir la méthode de référence car elle présente de nombreux avantages : pas de calcul de dérivées partielles, pas d'approximation, applicable à des calculs complexes (étalonnage non linéaire par exemple). Elle est relativement intuitive puisqu'elle simule explicitement la propagation d'erreurs dans les différentes transformations appliquées aux mesurandes primaires (représentés par les résultats de mesurage obtenus). Cependant elle nécessite comme la méthode analytique une très bonne connaissance du processus, des incertitudes élémentaires, ainsi que de la structure des erreurs. Elle est plus lourde à mettre en œuvre qu'un calcul analytique lorsque le modèle de mesure est simple.

2.4.6 Phase 6 : Compte rendu de l'incertitude

Si le calcul a été réalisé à l'aide de la méthode analytique, on calcule en général une incertitude élargie U à l'aide d'un coefficient d'élargissement k . Dans la plupart des cas, il est recommandé de fixer la valeur de k à 2 (confiance de 95%). Cette valeur est directement liée à un résultat bien connu pour une densité de probabilité gaussienne. Pour une loi normale, 95% de la population se situe dans un intervalle ± 1.96 écart-type ($\sim \pm 2$).

Cependant cette valeur de k peut être insuffisante lorsque l'incertitude composée est fondée sur des observations statistiques (méthode de type A) dont le nombre d'observations est assez faible (moins de 6). Dans ce cas, il est plutôt recommandé de prendre $k=3$.

Si le calcul de propagation a été réalisé par la méthode de Monte Carlo, une analyse de la distribution des valeurs possibles du mesurande permet de déterminer un intervalle de confiance au seuil $(1-\alpha)\%$. Dans le cas d'une distribution dissymétrique, on choisira l'intervalle le plus étroit au niveau de probabilité spécifié. Il est alors possible de donner comme résultat de mesure soit la valeur moyenne (« pic » de la distribution des valeurs possibles du mesurande), soit le centre de cet intervalle (pour une question de cohérence avec ce qui précède).

Quelle que soit la méthode de propagation utilisée les valeurs numériques du résultat et de son incertitude doivent être données avec un nombre raisonnable de chiffres significatifs. Trois chiffres sont largement suffisants, voir excessifs, pour des mesures hydrologiques. Les résultats du mesurage doivent donc être arrondis afin d'être cohérents avec la valeur de l'incertitude associée.

3 IDENTIFICATION ET QUANTIFICATION DES INCERTITUDES SUR LES MESURANDES PRIMAIRES

Ce chapitre a pour objectif d'identifier et de quantifier les incertitudes relatives aux mesurandes primaires couramment évalués en assainissement : hauteur (h), vitesse locale (u), et concentration d'un prélèvement par analyse en laboratoire ($C_{éch}$). Le cas de la turbidité (T_u) sera davantage développé car il est moins classique. Le principe de chaque méthode de mesure sera rappelé, avant de détailler les différentes sources d'incertitude possibles, de préciser le caractère plutôt aléatoire ou plutôt systématique des erreurs correspondantes et de les intégrer dans un exemple de calcul de propagation, pour terminer par des valeurs d'incertitude issues de la littérature. **Ces valeurs ne sont qu'indicatives car elles dépendent clairement de l'instrument utilisé, de la qualité de la mise en œuvre, de l'influence du milieu de mesure et de sa variabilité.** Notons que la qualité des mesures est aussi conditionnée par la fréquence des opérations de maintenance qui ont pour but d'assurer un suivi de la qualité de mesure des appareils. Par ailleurs, un fichier Excel[®] est proposé avec ce guide. Il présentera pour chaque exemple un outil pour aider le lecteur à quantifier l'incertitude relative au mesurande étudié.

3.1 Hauteur d'eau (h)

Une hauteur d'eau peut être définie comme la différence de cote entre un niveau d'eau et une cote de référence, en général celle du radier à la verticale du point de mesure de la position du niveau d'eau.

Différentes techniques sont employées pour mesurer la position d'un niveau d'eau par rapport à une cote de référence liée au capteur. Nous nous intéresserons ici aux méthodes les plus employées en réseau d'assainissement, à savoir : (i) une mesure de la distance de la surface de l'eau au capteur via le temps de transit d'une onde (capteur ultrasonore), (ii) une mesure plus indirecte via la mesure d'une grandeur (la pression) reliée à la hauteur d'eau (capteur piézométrique).

3.1.1 Capteurs ultrasonores

3.1.1.1 Principe

Un capteur, placé au dessus de l'écoulement, émet des ondes ultrasonores qui sont réfléchies par la surface de l'eau et renvoyées vers le capteur. La distance séparant le capteur de la surface de l'eau (d) est directement proportionnelle au temps de transit de l'onde (T_t) et à la célérité des ultrasons dans l'air (C_{us}). Connaissant la géométrie de la conduite (soit la distance entre le capteur et le radier, D_{rad}), il est possible de déterminer la hauteur d'eau (h) :

$$h = D_{rad} - d = D_{rad} - C_{us} \times \frac{T_t}{2} \quad \text{Eq. 3-1}$$

3.1.1.2 Sources d'erreur

Au regard du principe de mesure et de l'équation précédente, l'incertitude associée à cette mesure peut provenir de différentes sources :

- Matière : l'écume et les mousses éventuelles à la surface de l'eau, ainsi que les corps flottants peuvent absorber l'énergie des ultrasons ou constituer une interface de réflexion au dessus de l'interface air-eau (erreur aléatoire)
- Moyens : la mesure du temps de transit (T_t) par le capteur (erreur systématique). La précision des horloges actuelles rend cette source d'incertitude généralement négligeable
- Méthode : la stabilité dans le temps du capteur doit être vérifiée occasionnellement (erreur systématique)
- Main d'œuvre : la position du capteur et donc de la distance D_{rad} (erreur systématique)
- Milieu : la masse volumique de l'air, liée principalement à la température (θ), mais aussi la pression influencent la célérité des ultrasons dans l'air (erreur systématique). Une sonde de température de l'air permet de corriger automatiquement la valeur de la célérité. Cette correction reste imparfaite dans la mesure où il faudrait connaître la température de l'air tout au long du cheminement de l'onde, et pas seulement au niveau du capteur de température associé au capteur à ultrasons

L'expression analytique de la composition des incertitudes relative à l'équation précédente s'écrit donc :

$$u(h) = \sqrt{u^2(D_{rad}) + \left(C_{us} \times \frac{T_t}{2}\right)^2 \times \left[\left(\frac{u(C_{us})}{C_{us}}\right)^2 + \left(\frac{u(T_t)}{T_t}\right)^2 \right]} \quad \text{Eq. 3-2}$$

3.1.1.3 Valeurs indicatives

Dans des conditions stables de réflexion et de température, les capteurs à ultrasons offrent en général des incertitudes absolues de mesure de l'ordre de 0,2 % à 0,3 % de l'étendue de mesure (exprimée en distance au capteur, et non en hauteur d'eau), et toujours supérieures à 6 mm.

Les retours d'expérience actuels en assainissement montrent qu'il est possible d'assurer une incertitude élargie de +/- 1 % de l'étendue de mesure du limnimètre à ultrasons pour des valeurs moyennes sur 1 minutes, moyennant une mesure précise de la position du capteur par rapport au radier. Pour des étendues de mesure inférieures ou égales à 1 m, l'incertitude est au mieux égale à 1 cm (Bertrand-Krajewski et al., 2000).

3.1.2 Capteurs piézométriques

3.1.2.1 Principe

Le principe de ce type de capteur est basé sur le mesurage de la pression hydrostatique d'une colonne d'eau au moyen d'un capteur de pression immergé, constitué d'une membrane souple qui se déforme sous la pression. Cette déformation est ensuite convertie en signal électrique à l'aide d'un transducteur (de type piézo-résistif, résistif ou capacitif). La face arrière de la membrane peut être mise à la pression atmosphérique au moyen d'un tube débouchant à l'air libre : le capteur est dit différentiel ou relatif. Dans la cas contraire, il s'agit d'un capteur

absolu qui mesure la somme de la pression de l'eau et de la pression atmosphérique. Il faut alors utiliser un deuxième capteur placé hors d'eau pour mesurer la pression atmosphérique (P_{atm} , exprimé en N/m^2) et corriger la mesure. En effet les variations de pression atmosphériques sont équivalentes à plusieurs dizaines de centimètres d'eau et il n'est pas concevable de les négliger.

Sous réserve de plusieurs simplifications (compressibilité de l'eau négligée) on parvient à la relation suivante :

$$h = \frac{P_w - P_{atm}}{g \times \rho_w} + h_{\text{capteur}} = \frac{\Delta P}{g \times \rho_w} + h_{\text{capteur}} \quad \text{Eq. 3-3}$$

où ρ_w est la masse volumique de l'eau (kg/m^3), g l'accélération de la pesanteur (m/s^2) et h_{capteur} la hauteur indiquant la position du capteur par rapport au radier.

3.1.2.2 Sources d'erreur

Au regard du principe de mesure et de l'équation précédente, l'incertitude associée à cette mesure peut provenir de différentes sources :

- Matière : dans un écoulement dynamique, toute composante de vitesse U perpendiculaire à la membrane du capteur induit une composante de pression dynamique égale à $U^2/2g$ dont il faut tenir compte (erreur systématique)
- Moyens : Le différentiel de pression (ΔP) mesuré par le capteur est influencé par l'emplacement où est mesurée la pression atmosphérique (erreur systématique)
- Méthode : la stabilité dans le temps du capteur doit être vérifiée occasionnellement (erreur systématique) car ces capteurs sont sujets à dérive
- Main d'œuvre : l'étanchéité de la mise à la pression atmosphérique ainsi que la position du capteur doivent être vérifiées régulièrement (erreur systématique)
- Milieu : la masse volumique de l'eau (ρ_w) n'est pas constante, mais varie surtout en fonction de la concentration de divers éléments de masses volumiques différentes de celle de l'eau (salinité), mais aussi de la pression et de la température (erreur systématique)

L'expression analytique de la composition des incertitudes relative à l'équation précédente s'écrit donc :

$$u(h) = \sqrt{\left(\frac{\Delta P}{g \times \rho_w}\right)^2 \times \left[\left(\frac{u(\Delta P)}{\Delta P}\right)^2 + \left(\frac{u(\rho_w)}{\rho_w}\right)^2 \right] + u^2(h_{\text{capteur}})} \quad \text{Eq. 3-4}$$

3.1.2.3 Valeurs indicatives

Les capteurs piézométriques présentent généralement des incertitudes élargies de mesure comprises entre 0,1 et 0,5 % de l'étendue de mesure dans des conditions d'eau douce calme et à température constante.

Les retours d'expérience actuels montrent qu'il est possible d'assurer une incertitude élargie de l'ordre de +/- 1% de l'étendue de mesure du limnimètre piézométrique pour des valeurs moyennes sur 1 minutes. Pour des étendue de mesure inférieures ou égales à 1 m, l'incertitude élargie est au mieux égale à 1 cm (Bertrand-Krajewski et al., 2000).

3.2 Vitesse « locale » (u_c et u_D)

On désigne ici par « vitesse locale » le mesurande correspondant à une moyenne d'une composante particulière des vitesses dans un domaine spatial donné. La composante concernée et le domaine spatial échantillonné, et donc le mesurande, sont définis par la technologie mise en œuvre. Ces mesurandes primaires sont utilisés pour évaluer une grandeur dérivée, représentant la vitesse moyenne sur une section perpendiculaire à l'écoulement (voir l'exemple Figure 6).

Différentes méthodes existent pour mesurer une vitesse dans un écoulement à surface libre. On s'intéressera ici aux deux techniques les plus utilisées en assainissement : mesurage du temps de transit par ultrasons et mesurage par effet Doppler.

3.2.1 Mesure du temps de transit (cordes de vitesse)

3.2.1.1 Principe

Le principe de ce type de capteur repose sur le mesurage de la différence des temps de propagation d'une onde ultrasonore selon qu'elle se déplace dans le sens de l'écoulement ou dans le sens contraire. Pour cela, deux capteurs ultrasons alternativement émetteur et récepteur sont installés et immergés sur les bords opposés d'un collecteur (points A et B) à une même hauteur. Ils sont séparés par une distance D et forme un angle β par rapport au sens de l'écoulement.

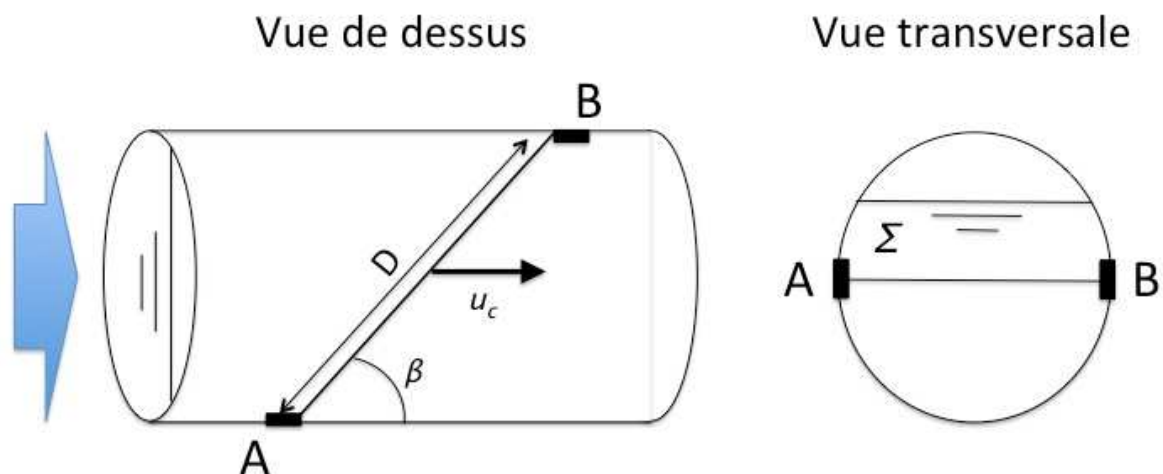


Figure 6 : Principe d'une mesure de vitesse locale par un capteur à ultrasons

La mesure des temps respectifs pour aller de A à B (t_{AB}) et de B à A (t_{BA}) permet de mesurer la vitesse moyenne d'écoulement au niveau de la trajectoire AB, appelée aussi corde (sous réserve de simplifications) :

$$u_c = \frac{D}{2 \times \cos \beta} \left(\frac{1}{t_{AB}} - \frac{1}{t_{BA}} \right) \quad \text{Eq. 3-5}$$

3.2.1.2 Sources d'erreur :

Au regard du principe de mesure et de l'équation précédente, l'incertitude associée à cette mesure peut provenir de différentes sources :

- Matière : les fluctuations de direction de la vitesse de l'eau perturbent la mesure, qui ne prend en compte que la composante des vitesses parallèle à AB (erreur aléatoire). Par ailleurs la présence de bulles peut bloquer la transmission du signal, mais il ne s'agit plus ici d'incertitudes mais de pertes de données
- Moyens : l'évaluation des temps de transit t_{AB} et t_{BA} par le capteur (qui sont souvent extrêmement faibles), (erreur systématique)
- Main d'œuvre : l'angle β et la distance D doivent être évalués précisément lors de l'installation (erreur systématique)
- Milieu : la variabilité de la vitesse du son dans l'eau est sensible à la masse volumique de l'eau, et donc à la température et à la salinité de l'eau S), (erreur systématique).

L'incertitude globale de la vitesse v est déterminée à l'aide de la formule de composition des incertitudes :

$$u^2(u_c) = u_c^2 \left(\frac{u(D)}{D} \right)^2 + (u_c \times \tan(\beta) \times u(\beta))^2 + \left(\frac{D}{2 \cos \beta} \right)^2 \left(\frac{u^2(t_{AB})}{t_{AB}^4} + \frac{u^2(t_{BA})}{t_{BA}^4} \right) \quad \text{Eq. 3-6}$$

3.2.1.3 Valeurs indicatives

Les capteurs ultrasonores présentent généralement des incertitudes élargies de mesure de l'ordre de +/- 1 % de l'étendue de mesure dans des conditions de mesure idéales en eau claires.

En prenant en compte, les autres sources d'incertitude (essentiellement la modification de la célérité dans l'eau), les mesures de vitesse sont caractérisées par une incertitude élargie de +/- 2 %.

3.2.2 Capteurs Doppler

3.2.2.1 Principe

Le principe de ce type de mesure repose sur le décalage en fréquence d'une onde ultrasonore. Pour cela, le capteur est placé sur le radier du collecteur avec un angle β par rapport à la direction de l'écoulement. Il est utilisé comme émetteur et récepteur.

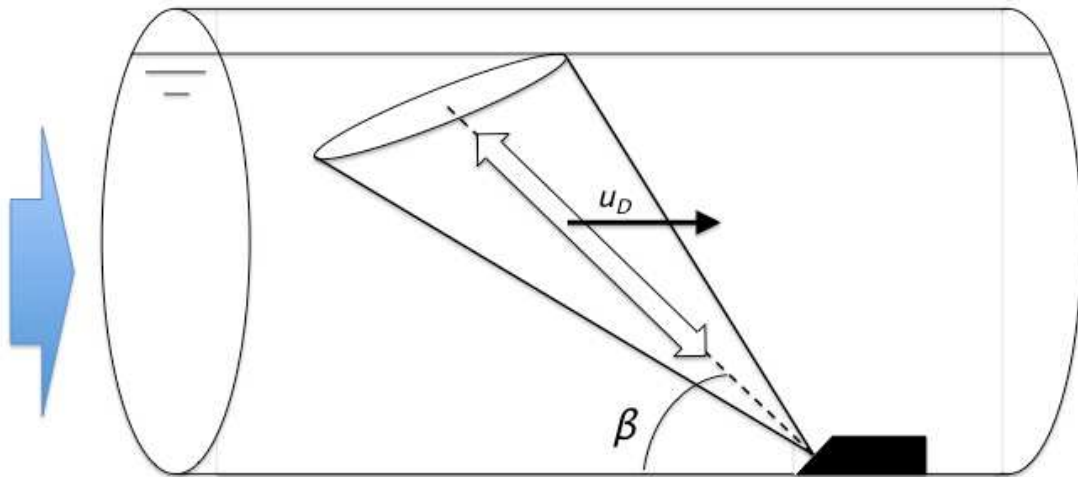


Figure 7 : Principe d'une mesure de vitesse par effet Doppler

Il émet une onde de fréquence f_{us} et réceptionne une onde modifiée de fréquence f_{us}' réfléchiée par les particules en suspension et les bulles d'air transportées par l'écoulement. L'écart de fréquence $\Delta f_u = f_{us} - f_{us}'$ est directement proportionnel à la vitesse de déplacement des particules donc de l'eau :

$$u_D = \frac{C_{us} \times (f_{us} - f_{us}')}{2f_{us} \times \cos \beta} \quad \text{Eq. 3-7}$$

où C_{us} est la célérité du son dans l'eau (m/s)

3.2.2.2 Sources d'erreur

Au regard du principe de mesure et de l'équation précédente, l'incertitude associée à cette mesure peut provenir de différentes sources :

- Matière : les fluctuations de direction de la vitesse de l'eau perturbent la mesure, qui ne prend en compte que la composante des vitesses dans la direction du capteur (erreur aléatoire)
- Moyens : Le mode de traitement de l'ensemble des signaux issus des diverses particules présentes dans le cône à une influence sensible sur le résultat (erreur définitionnelle systématique)
- Méthode : Le volume échantillonné a grosso modo la forme d'un cône dont l'extension peut varier dans le temps en fonction de la concentration de l'effluent (erreur définitionnelle systématique. De plus la direction de la composante radiale varie à l'intérieur de ce cône (l'angle β n'est pas constant)(erreur aléatoire et systématique).
- Main d'œuvre : l'angle β doit être évalué précisément lors de son installation (erreur systématique)
- Milieu : C_{us} dépend de la température de l'eau ainsi que de sa masse volumique (salinité), (erreur systématique).

En s'appuyant sur l'équation précédente, l'incertitude-type composée de la vitesse par Doppler vaut :

$$u^2(u_D) = u^2(C_{us}) \times \left(\frac{f_{us} - f_{us}'}{2f_{us} \times \cos \beta} \right)^2 + u^2(f_{us}) \times \left(\frac{C_{us} \times f_{us}'}{2f_{us}^2 \times \cos \beta} \right)^2 + u^2(f_{us}') \times \left(\frac{C_{us}}{2f_{us} \times \cos \beta} \right)^2 + u^2(\beta) \times \left(\frac{C_{us} \times (f_{us} - f_{us}') \times \sin \beta}{2f_{us} \times \cos^2 \beta} \right)^2 \quad \text{Eq. 3-8}$$

3.2.2.3 Valeurs indicatives

La résolution de l'appareil (de l'ordre de quelques mm/s) engendre une incertitude élargie inférieure à 1% de la valeur mesurée et celle liée à l'angle β est de l'ordre de 5%. Si l'on y ajoute les incertitudes dues au milieu (salinité et fluctuation) de l'ordre de 10%, on parvient à une incertitude type totale sur V de l'ordre de +/- 15%.

3.3 Concentration obtenue par analyse sur un prélèvement ($C_{éch}$)

3.3.1 Principe

On s'intéresse ici aux mesures de concentration en MES directement réalisées à partir de prélèvements. Ces mesures de concentration se font généralement à l'aide d'échantillons réalisés à l'aide d'un préleveur automatique positionné dans le réseau de collecte. Ces préleveurs automatiques peuvent être fixes ou portables et comporter un ou plusieurs flacons (4 à 24). Les prélèvements peuvent aussi être asservis au volume ou au temps (prélèvements à fréquence fixe). La prise d'eau est effectuée dans le flux d'eau du réseau d'assainissement grâce à un pompage via un tuyau de prélèvement. Chaque volume d'eau prélevé est distribué et conservé dans le ou les flacons selon la stratégie programmée. L'analyse en laboratoire réalisée sur un prélèvement permet d'obtenir une concentration $C_{éch}$.

3.3.2 Sources d'erreur

Malgré le respect de règles élémentaires pour obtenir des échantillons représentatifs de l'effluent (position de la prise d'eau du préleveur, débit de pompage, remplissage des flacons...), les sources d'incertitude peuvent être nombreuses :

- Matière :
- Moyens :
- Méthode : (i) modification de l'échantillon au cours du transport entre la prise d'eau et le flacon d'échantillonnage (contamination possible de l'échantillon du prélèvement à cause du matériel utilisé par exemple), (ii) conservation de l'échantillon car les délais et les conditions de conservation des échantillons avant analyse influencent grandement la qualité des résultats (il est pour cela recommandé d'effectuer l'ensemble des analyses dans un délai de 24h pour les MES, les échantillons étant conservés à 4°C), (iii) analyse réalisée en laboratoire. Elles représentent toutes des erreurs aléatoires.
- Main d'œuvre : expérience des personnels et matériels utilisés
- Milieu :

3.3.3 Valeurs indicatives

Parmi toutes ces sources d'erreur, nous proposons ici de nous focaliser sur l'incertitude d'analyse qui peut être estimée à l'aide de tests de répétabilité (ou de reproductibilité). On peut, par exemple, réaliser des triplicats comme proposé par Bertrand-Krajewski *et al.* (2008). La concentration en MES est mesurée pour chacun

de ces sous-échantillons prélevés à partir d'un même échantillon (généralement 1L). Dans ce cas (triplicats), la concentration moyenne est calculée en même temps que son incertitude qui vaut l'écart-type de ces 3 mesures divisé par $\sqrt{3}$. Des retours d'expérience montrent que l'incertitude d'analyse sur les concentrations en MES $C_{éch}$ est inférieure à +/- 6 %.

3.4 Turbidité (T_{up})

3.4.1 Principe

La turbidité est définie comme la réduction de transparence d'un liquide due à la présence de matières non dissoutes (NF EN ISO 7027, 2000). Deux techniques de mesurage conviennent aux applications en assainissement : atténuation et diffusion (dont les résultats sont exprimé respectivement en FAU- Formazin Attenuation Unit- et FNU – Formazin Nephelometric Unit). Dans les deux cas, la sonde est immergée dans le collecteur et un récepteur mesure l'atténuation (ou la diffusion) d'un rayon infrarouge.

3.4.2 Sources d'incertitude

L'incertitude associée à cette mesure peut provenir de différentes sources :

- Matière : forte variabilité du mesurande dans l'espace et dans le temps (erreur définitionnelle, aléatoire)
- Moyens : étalonnage de l'appareil relatif d'une part aux solutions étalon utilisées pour cette opération, et d'autre part aux problèmes de linéarité liés à l'établissement de la courbe ad hoc (erreur systématique)
- Méthode : choix de la courbe d'étalonnage, stabilité dans le temps du capteur qui doit être vérifiée fréquemment (erreur systématique)
- Main d'œuvre : les opérations de vérification et d'étalonnage demandent un certain savoir-faire, en particulier pour assurer l'homogénéité des suspensions de référence utilisées
- Milieu : l'encrassement des optiques par des biofilms peut provoquer des dérives. Les bulles d'air, les filasses et autres macro-particules perturbent le signal sans qu'on puisse parler d'incertitudes : les données correspondantes doivent être éliminés par un processus de validation adapté

Nous allons présenter ici comment estimer les deux sources principales d'incertitude que représentent l'incertitude d'étalonnage (u_{et}) et l'incertitude expérimentale (u_{ex}) liée à la variabilité du mesurande.

3.4.3 Estimation de l'incertitude d'étalonnage

Elle comporte deux composantes : l'incertitude sur les étalons, et l'adéquation de la forme de la courbe d'étalonnage choisie à la réponse de l'appareil :

➤ L'incertitude sur les étalons : celle-ci est liée à la fabrication des solutions étalons (de formazine, selon la norme NF EN ISO 7027, 2000). Elle peut être approchée à l'aide d'opérations de répétabilité et de reproductibilité (voir le guide ONEMA à ce sujet : Versini et al., 2015). Dans ce dernier cas, on réalise plusieurs solutions de formazine (des triplicats par exemple) dont on en mesure la turbidité (supposée sans erreur). L'incertitude est approchée par l'écart type de ces mesures.

➤ L'incertitude liée à la courbe d'étalonnage tient compte des incertitudes sur les couples de valeurs (étalons et mesures du capteur) et des erreurs résiduelles issues de la régression ajustée. Il est possible d'utiliser une méthode de type Monte-Carlo (voir Ruban et al., 2007) pour évaluer cette incertitude (issue alors d'erreurs aléatoires). Celle-ci est présentée plus en détail en Annexe en Chapitre 7. De plus, un outil fourni avec ce guide (fichiers Excel de régression polynomiale) permet de la quantifier (présenté en Chapitre 8).

Des incertitudes types d'étalonnage u_{et} de l'ordre de +/- 3 % de la valeur mesurée (pouvant néanmoins être supérieures à +/- 5% pour les faibles valeurs de turbidité) sont obtenues moyennant des précautions adéquates. Cela représente +/- 7 FAU (respectivement +/- 4 FNU) pour des valeurs de l'ordre de 200-300 FAU (respectivement 150-200 FNU).

3.4.4 Estimation de l'incertitude expérimentale

Elle correspond aux fluctuations des indications de l'appareil par rapport à un mesurande supposé fixe. Elle comprend donc l'incertitude définitionnelle liée à la variabilité du mesurande à l'intérieur de la fenêtre d'intégration ainsi que la répétabilité intrinsèque de l'appareil. Comme il n'est pas possible ni utile de les dissocier, on se limite généralement à estimer cette incertitude à partir de fluctuations des valeurs observées de turbidité.

Cette incertitude expérimentale (considérée comme relevant d'erreurs aléatoires) peut être caractérisée de deux manières, correspondant aux deux types de mesurage de turbidité pour lesquels on veut évaluer une incertitude.

➤ Pour les mesures in situ on procède à des enregistrements à pas de temps court : on s'intéresse ici à la représentativité d'une valeur moyenne calculée sur un pas de temps d'enregistrement. Pour en quantifier la variabilité et l'incertitude associée, on procède ponctuellement (une fois que l'installation semble donner satisfaction) à des enregistrements *in situ* de la manière suivante :

- L'amortissement réglé au minimum, on acquiert le signal de turbidité à une périodicité élevée de l'ordre de la seconde pendant quelques jours.
- On vérifie que les valeurs successives obtenues sur des fenêtres correspondant au pas de temps d'enregistrement (typiquement 1mn) ne sont pas corrélées.
- On calcule sur chaque fenêtre l'écart type des fluctuations σ et on en déduit

l'écart type de la moyenne arithmétique : $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$, où N représente le nombre d'acquisitions réalisées dans cette fenêtre.

- On détermine ensuite la distribution de ces écarts types.
- On définit un écart type de référence représentatif de l'incertitude expérimentale ou bien un intervalle de confiance (correspondant aux bornes de l'intervalle regroupant 95% des valeurs par exemple).

➤ Pour les mesures au laboratoire on effectue un test de répétabilité, La mesure s'effectue en laboratoire à partir d'un échantillon d'effluent prélevé au point de mesure considéré et sur lequel on effectuera un nombre conséquent de mesures (N peut être de l'ordre de 25). La stabilité du mesurande étant assurée par l'unicité de

l'échantillon, la durée de la mesure peut s'étendre sur plusieurs minutes et la fréquence des lectures n'a pas besoin d'être très élevée. L'incertitude expérimentale

est alors estimée par l'écart type de moyenne : $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$.

Des écarts types expérimentaux u_{ex} de 5 à 20 FAU (respectivement autour de 10 FNU) en fonction de la turbidité (soit +/- 3-4% de la valeur mesurée) ont été observés en réseau unitaire aussi bien en temps sec qu'en temps de pluie, mais leur impact peut être limité en exploitant des moyennes sur un nombre suffisant de valeurs indépendantes. Par exemple des moyennes sur une minute permettent d'obtenir une incertitude expérimentale inférieure à 5 FAU.

3.4.5 Valeurs indicatives

L'incertitude-type totale représente la somme des deux incertitudes d'étalonnage et expérimentale ($u_{tot}^2 = u_{et}^2 + u_{ex}^2$). Une incertitude totale de +/- 5% (généralement pas moins de +/-25 FAU ou +/-10 FNU) peut constituer un ordre de grandeur réaliste pour les mesures réalisées sur le terrain, moyennant des vérifications régulières. Notons que des outils ont été proposés pour aider au calcul de cette incertitude dans un guide ONEMA publié il y a peu (<http://www.onema.fr/IMG/pdf/Guide-Turbidite.pdf>).

4 COMPOSITIONS DES INCERTITUDES SUR DES GRANDEURS DERIVEES INSTANTANEEES

Ce chapitre s'intéresse aux mesurandes dérivés (vitesse moyenne dans une section, débit, concentration moyenne dans une section estimée à partir de la turbidité ou par prélèvement et analyse, flux polluant) issus de mesurandes primaires étudiés dans le chapitre précédent et combinés à travers un modèle de mesure. Pour cette raison, nous ne présenterons pas les sources d'incertitude à l'aide du diagramme 5M mais uniquement la manière dont les différentes incertitudes-types sur les mesurandes primaires sont combinées.

4.1 Mesure de vitesse moyenne dans une section (U)

La vitesse moyenne (spatiale) U dans une section Σ de surface S se définit comme :

$$U = \frac{\iint_{\Sigma} u(x, y) d\sigma}{S} \quad \text{Eq. 4-1}$$

La vitesse mesurée par les capteurs de vitesse est :

- soit une vitesse moyenne arithmétique sur une transversale (corde de vitesse)
- soit une vitesse moyenne pondérée par les distances calculée dans un volume approximativement conique (Doppler)

Il faut donc appliquer une correction aux vitesses mesurées par les capteurs pour obtenir la vitesse moyenne dans une section et calculer ensuite un débit. Cette correction n'est pas parfaite et implique des incertitudes. L'erreur de correction est pour l'essentiel systématique, c'est à dire reproductible pour une hauteur d'eau et une vitesse donnés, et ne sera pas compensée lors d'une intégration (chapitre 5).

4.1.1 A l'aide de cordes de vitesse

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent (sous-section 3.2.1), la mesure de vitesse u_c par temps de transit ne correspond qu'à une mesure au niveau de la trajectoire AB. Elle n'est donc pas représentative du champ de vitesse caractéristique du débit total à travers la section de mesure. Pour obtenir la vitesse moyenne sur la section mouillée, il faut soit disposer de plusieurs capteurs de vitesse placés à des hauteurs différentes dans la conduite, soit ajuster les mesures d'un capteur unique (placé dans la partie basse de la conduite, pour être constamment immergé et fournir en permanence des informations) à l'aide d'un coefficient K_{u_c} comme indiqué dans la norme NF EN ISO 6416 dont les notations ont été adaptées pour le présent guide (le coefficient K_{u_c} correspond ici au coefficient C_v de la norme, et la vitesse u_c est notée v dans celle-ci) :

$$U = K_{u_c} \times u_c \quad \text{Eq. 4-2}$$

On se limitera ici au cas le plus simple, celui d'une corde unique. Le coefficient K_{u_c} dépend évidemment de la géométrie de la section, mais aussi de la hauteur d'eau dans celle-ci, et constitue une source d'incertitude importante. La norme (ISO

6416, 2005) donne à titre d'exemple des valeurs de K_{uc} comprises entre 0,85 et 1,42 en fonction du taux de remplissage. L'incertitude type correspondante peut varier de 1% à 8% pour un taux de remplissage donné.

Après composition avec l'incertitude sur la mesure de la vitesse sur une corde (+/- 2%, cf. sous-section 3.2.1), et si l'on ne connaît pas K_{uc} (on suppose alors qu'il vaut 1), l'incertitude-type composée sur U peut être assez élevée (+/-20%), voire davantage lorsque la conduite est quasiment en charge.

En pratique on peut obtenir des valeurs plus faibles, par exemple de l'ordre de +/- 10% pour des valeurs moyennes sur une minute pour un système multi-cordes (Bertrand-Krajewski et al., 2000).

4.1.2 A l'aide d'un capteur Doppler

La vitesse moyenne mesurée à partir du spectre d'énergie provenant du volume exploré n'est pas égale à la vitesse moyenne dans une section de l'écoulement U . Celle-ci peut être corrigée à l'aide d'un coefficient théorique K_{uD} ou expérimental étalonné *in situ* :

$$U = K_{uD} \times u_D \quad \text{Eq. 4-3}$$

Lors du passage à une valeur moyenne dans la section, il faut introduire l'incertitude liée au paramètre K_{uD} (provenant d'une erreur pour l'essentiel systématique, ou à tout le moins répétable), de l'ordre de 10%. L'incertitude-type composée à prendre en compte lors de la transformation de la mesure de vitesse intégrée en vitesse moyenne pour un capteur de type Doppler est donc de l'ordre de +/- 10 % (Bertrand-Krajewski et al., 2000).

4.2 Calcul de débit à l'aide d'une mesure de hauteur et de la vitesse moyenne ($Q(h,U)$)

Le débit d'un fluide dans une conduite est estimé comme le produit de la vitesse moyennée sur la section mouillée U par la surface $S(h)$ de cette section (la surface étant une fonction de la hauteur d'eau h) :

$$Q(h,U) = S(h) \times U \quad \text{Eq. 4-4}$$

L'erreur sur la surface mouillée peut dépendre de la valeur (réelle) de la hauteur d'eau. Il en est de même pour l'erreur sur la mesure de vitesse. A priori ces deux erreurs ne sont donc pas indépendantes. Il est possible de sécuriser le calcul en prenant en compte un terme de covariance maximum, qui correspond à une absence de composante aléatoire et une corrélation parfaite entre les erreurs. On a alors:

$$\begin{aligned} u(Q)^2 &= u(S)^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial S} \right)^2 + u(U)^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial U} \right)^2 + 2u(S) \times u(U) \times \left(\frac{\partial Q}{\partial S} \right) \times \left(\frac{\partial Q}{\partial U} \right) \\ &= u(S)^2 \times U^2 + u(U)^2 \times S^2 + 2.U.S \times u(S) \times u(U) \end{aligned} \quad \text{Eq. 4-5}$$

Soit :

$$u(Q) = Q \left(\frac{u(S)}{S} + \frac{u(U)}{U} \right) \quad \text{Eq. 4-6}$$

Mais en l'absence d'informations plus précises, il est aussi possible de négliger les composantes systématiques qui pourraient être corrélées. On peut alors écrire :

$$u(Q)^2 = u(S)^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial S} \right)^2 + u(U)^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial U} \right)^2 = u(S)^2 \times U^2 + u(U)^2 \times S^2 \quad \text{Eq. 4-7}$$

Soit :

$$u(Q) = Q \sqrt{\frac{u(S)^2}{S^2} + \frac{u(U)^2}{U^2}} \quad \text{Eq. 4-8}$$

Nous allons présenter ci-après différents cas de figure pour le calcul de l'incertitude sur la surface mouillée $u(S)$: section circulaire et section quelconque (avec approximation polynomiale ou tabulation).

4.2.1 Section circulaire

Soit une conduite circulaire de rayon R équipée d'un capteur de hauteur d'eau (h). La surface mouillée s'exprime comme :

$$S(h) = \left(R^2 \arccos \left(1 - \frac{h}{R} \right) - (R-h) \sqrt{2hR - h^2} \right) \quad \text{Eq. 4-9}$$

Les sources d'incertitude concernent les variables R , h (erreurs systématiques). Les erreurs sur ces deux grandeurs sont a priori indépendantes et on peut appliquer l'équation de propagation des incertitudes sur la forme :

$$u(S)^2 = u(R)^2 \left(\frac{\partial S}{\partial R} \right)^2 + u(h)^2 \left(\frac{\partial S}{\partial h} \right)^2 \quad \text{Eq. 4-10}$$

avec :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial R} \right) = 2 \times R \times \text{Arc} \cos \left(1 - \frac{h}{R} \right) - 2 \sqrt{2hR - h^2} \quad \text{Eq. 4-11}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial h} \right) = 2 \sqrt{2hR - h^2} \quad \text{Eq. 4-12}$$

Les 2 incertitudes $u(R)$, $u(h)$ doivent être évaluées séparément. Pour la première, les valeurs de diamètres commerciaux sont normalisées, mais l'incertitude associée n'est pas spécifiée. Elle correspond aux irrégularités de la canalisation, voire à sa déformation (ovalisation). Une valeur d'incertitude élargie de 1 cm peut être raisonnable. Pour $u(h)$ on pourra se reporter à la section 3.1 de ce guide. Des

abaques (comme ceux présentés Figure 8) peuvent être établis. Ils déterminent pour une hauteur d'eau et un rayon donnés, la surface mouillée ainsi que l'incertitude correspondantes. Dans ce cas, il a été pris : $u(R)=u(h)=0,5\text{ cm}$.

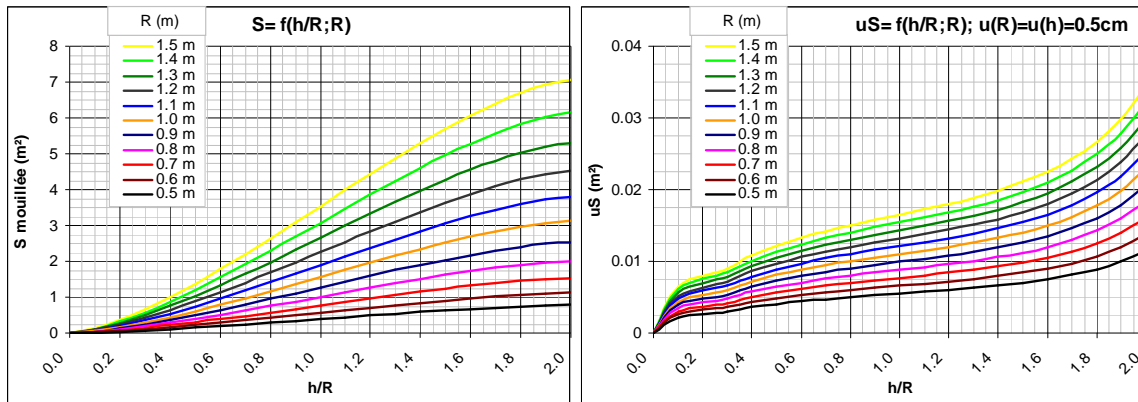


Figure 8: Surface mouillée pour une section circulaire, en fonction du diamètre et du taux de remplissage et incertitude associée pour $u(h)=u(R)=0.5\text{cm}$

En pratique, pour ce type de section, on obtient des valeurs d'incertitude-type composée sur la section mouillée de l'ordre de +/- 0.5%. Ce qui montre que cette incertitude est négligeable devant celle des vitesses. Des valeurs de l'ordre de +/- 10% à +/- 15% peuvent être utilisées pour l'incertitudes-type composée du débit (cas de multi-cordes, Eq. 4-8) et peuvent atteindre +/- 20% dans le cas d'un seul corde ou d'un capteur Doppler.

4.2.2 Section quelconque (régression polynômiale de 2nd degré)

Dans ce cas, la section mouillée est déterminée à partir de la hauteur d'eau mesurée au moyen d'une relation $S(h)$ ajustée spécifiquement à la section considérée (polynôme d'ordre 2) :

$$S(h) = (b_0 + b_1h + b_2h^2) \quad \text{Eq. 4-13}$$

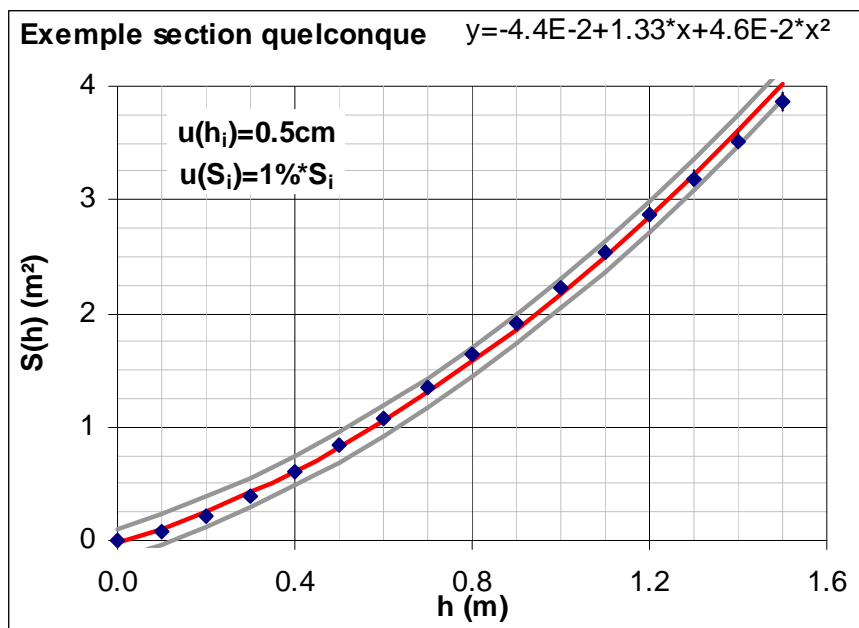


Figure 9: Exemple d'une régression polynômiale d'ordre 2. Les deux courbes grises matérialisent l'intervalle de confiance à 95% pour $u(h_i)=0,5$ cm et $u(S_i)=0,01S_i$.

La relation $S(h)$ est établie par la méthode des moindres carrés ordinaires à partir de n couples de points (h_i, S_i) expérimentaux, obtenus soit par un relevé *in situ*, soit (à défaut) à partir d'un plan. Cette méthode permet d'obtenir les valeurs des coefficients b_j et de leurs incertitudes types $u(b_j)$. Notons qu'il faut aussi prendre en compte les covariances $u(b_j, b_k)$. Un outil est fourni avec ce livrable pour faciliter la détermination des coefficients b_j .

L'incertitude totale dépend donc de celles sur la mesure de hauteur, la mesure de vitesse ainsi que sur l'estimation des coefficients :

$$u(S)^2 = u(h)^2 \left(\frac{\partial S}{\partial h} \right)^2 + \sum_{j=0}^m u(b_j)^2 \left(\frac{\partial S}{\partial b_j} \right)^2 + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=j+1}^m u(b_j, b_k) \left(\frac{\partial S}{\partial b_j} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial b_k} \right) \quad \text{Eq. 4-14}$$

La feuille de calcul 4.2.3 fournie avec ce guide permet de déterminer l'incertitude totale à partir de l'établissement d'une relation surface mouillée/hauteur d'eau. Il comprend une méthode analytique pour déterminer les incertitudes simples sur les paramètres en tenant compte des covariances entre eux (pour un polynôme de degré inférieur ou égal à 2). Notons que les covariances sont à déterminer une seule fois pour un site donné.

4.2.3 Section quelconque (relation $S(h)$ tabulée)

Dans ce dernier cas de figure, on suppose qu'on dispose d'une table établissant pour un nombre fini de hauteurs d'eau dans la conduite, la surface mouillée correspondante, soit N couples $[h_i ; S(h_i)]$. On retrouve alors deux sources d'incertitude :

- incertitude liée à l'estimation des surfaces (erreur systématique) : les erreurs de mesure sont de l'ordre du cm, ce qui conduit dans des ouvrages dédiés à l'assainissement une erreur de l'ordre 3-4%.
- incertitude liée à l'interpolation entre deux couples de valeurs $[h_1 ; S(h_1)]$ et $[h_2 ; S(h_2)]$ connues (considérées comme provenant d'erreurs aléatoires) : comme il est difficile de connaître la courbure entre ces deux points, on fait l'hypothèse d'une interpolation linéaire :

$$S(h) = k_n \times (S(h_2) - S(h_1)) + S(h_1)$$

$$\text{avec } k_n = \frac{h - h_1}{h_2 - h_1}$$

Eq. 4-15

L'incertitude sur $S(h)$ prend donc en compte les incertitudes respectives sur les deux surfaces $S(h_1)$ et $S(h_2)$, ainsi que sur l'approximation linéaire reliant ces deux points, mais l'erreur due à la courbure :

$$u_{S(h)}^2 = (S(h_2) - S(h_1))^2 \times u_{k_h}^2 + (1 - k_h)^2 u_{S(h_1)}^2 + k_h^2 u_{S(h_2)}^2$$

$$\text{avec } u_{k_h}^2 = \frac{1}{(h_2 - h_1)^2} \left[u_h^2 + (1 - k_h)^2 u_{h_1}^2 + k_h^2 u_{h_2}^2 \right] \quad \text{Eq. 4-16}$$

L'outil fourni avec ce guide dispose d'une feuille de calcul 4.2.4 facilitant la détermination de cette incertitude en fonction des valeurs de h , h_1 , h_2 , $S(h_1)$, $S(h_2)$ et leurs incertitudes respectives.

4.3 Concentration moyenne dans une section (C_s) évaluée à partir d'une analyse sur un prélèvement

Comme nous l'avons vu en sous-section 3.3, l'analyse en laboratoire réalisée sur un échantillon permet d'obtenir une concentration $C_{éch}$. Le prélèvement est effectué en un point précis d'une section et est supposé représentatif de la concentration moyenne. En réalité, il existe une inhomogénéité des concentrations dans la section d'écoulement (erreur aléatoire) sous la forme d'un gradient, soit une augmentation de la concentration avec la profondeur. La ségrégation des particules au niveau de la prise d'eau (erreur aléatoire) est aussi possible. Elle est essentiellement liée à l'orientation du tuyau de prélèvement et à la vitesse de prélèvement (qui devrait être théoriquement égale à la vitesse d'écoulement, cf. Larrarte et Pons, 2011).

Si la concentration est utilisée pour un calcul de flux, cette moyenne peut être pondérée par les valeurs de vitesse en différents points de la section :

$$C_s = \frac{\iint_{\Sigma} c(x, y) \times u(x, y) d\sigma}{U} \quad \text{Eq. 4-17}$$

avec $c(x, y)$ concentration au point de coordonnées (x, y) dans le plan de la section et $u(x, y)$ module au point de coordonnées (x, y) de la composante de la vitesse normale à la section Σ de surface S .

Il est alors possible de définir un coefficient d'extrapolation spatiale K_{spa} tel que:

$$C_s = K_{spa} \times C_{éch} \quad \text{Eq. 4-18}$$

En pratique ce coefficient est supposé égal à 1 grâce au choix d'une section de mesure supposée assurer l'homogénéisation de l'effluent. Les écarts à cette hypothèse peuvent être traités sous forme d'incertitude sur K_{spa} (provenant d'erreurs essentiellement aléatoires). Une valeur d'incertitude-type de l'ordre de 10% n'est pas déraisonnable (estimée à l'aide de données issues de Larrarte et Cottineau, 2005).

Après composition, les valeurs retenues pour l'incertitude-type composée sur les concentrations de prélèvements ponctuels C_p qui prennent en compte l'incertitude liée au profil de concentration dans la section de mesure, celle d'analyse (voir section 3.3) restent généralement inférieures à +/- 12 %.

4.4 Turbidité moyenne dans une section (T_{us}) évaluée à partir d'une mesure locale

Un capteur de turbidité effectue une mesure locale et comme pour un prélèvement il faut extrapoler la valeur obtenue à l'ensemble de la section en multipliant le résultat brut par le coefficient K_{spa} défini plus haut :

$$T_{us} = K_{spa} \times T_{up} \quad \text{Eq. 4-19}$$

où T_{up} désigne la turbidité ponctuelle mesurée localement.

L'incertitude sur le coefficient d'extrapolation est la même que pour un prélèvement et aboutit à une incertitude-type composée de l'ordre de +/- 12%, soit +/- 30 FAU (respectivement +/-12 FNU) pour une valeur mesurée autour de 250 FAU (respectivement 100 FNU).

4.5 Concentration de MES évaluée à partir de la turbidité (C_T)

Pour une suspension de particules quelconques mais de composition donnée (distribution des tailles, formes, masses volumiques...) la turbidité est proportionnelle à la concentration de particules dans un échantillon. Pour cette raison, elle constitue un paramètre indicateur de la pollution particulaire. La conversion de valeurs de turbidité en valeurs de MES (appelé aussi pseudo-étalonnage) passe par l'établissement d'une relation de corrélation établie pour un site de mesure particulier. Cette relation est établie à partir de prélèvements d'échantillons et de mesures (turbidité et MES) réalisées en laboratoire.

Lors de cette conversion de la turbidité en MES, différentes sources d'incertitude peuvent apparaître : (i) lors de l'estimation de la mesure de turbidité, (ii) lors du calage de la courbe de pseudo-étalonnage (voir Annexe en Chapitre 8).

L'incertitude totale résulte donc de ces 2 facteurs :

- L'incertitude sur la mesure de turbidité sur le terrain (comprenant les incertitudes d'étalonnage, expérimentale et de représentativité spatiale), estimée à 12% (cf. section 3.4).
- L'incertitude sur la détermination de la relation moyenne provoquée par la dispersion des nuages de points turbidité - MES. Pour chaque point du nuage de points Turbidité-MES, il est possible de diminuer l'incertitude en réalisant des répétitions et en prenant la valeur moyenne (duplicats ou triplicats pour les MES et plusieurs mesures pour la turbidité). Notons qu'il est possible de d'améliorer l'estimation de cette dispersion en augmentant le nombre de points utilisés pour le pseudo-étalonnage. La détermination de cette source d'incertitude est présentée Annexe en Chapitre 8.

Ces deux sources d'incertitude sont prises en compte dans l'outil proposé avec ce guide (présentation détaillée de la méthode fournie avec l'outil). Des tests réalisés sur plusieurs terrains d'étude ont montré une incertitude-type composée sur la valeur moyenne de concentration en MES (par temps de pluie) fortement dépendante du nombre d'événements utilisés pour la constitution de la courbe de pseudo-étalonnage : elle est inférieure à $\pm 30\%$ pour 5 événements et inférieure à $\pm 10\%$

pour un nombre d'événements supérieur à 25 (Hannouche et al., 2011). Notons que l'incertitude est beaucoup plus faible par temps sec.

Comme pour les mesures de concentration par analyse, le passage d'une concentration locale à la concentration moyenne dans une section passe par l'application du coefficient K_{sa} , en général égal à 1 mais affecté d'incertitudes.

4.6 Mesure de flux polluant instantané (Φ)

L'estimation d'un flux polluant Φ est obtenue par le produit de la concentration moyenne dans une section par le débit :

$$\Phi = Q \times C_s \quad \text{Eq. 4-20}$$

L'erreur sur la concentration moyenne dans la section peut être liée au débit par l'intermédiaire de l'erreur sur le coefficient d'extrapolation K_{spa} . De même l'erreur sur le débit peut être liée à la valeur du débit, si elle comporte une composante systématique. Ces deux erreurs ne sont donc pas nécessairement indépendantes, mais comme précédemment, en l'absence d'informations plus précises, il est possible de négliger les composantes systématiques qui pourraient être corrélées. En utilisant la formule de composition propre au produit (cf. sous-section 2.4.5), on peut alors écrire :

$$u(\Phi) = \Phi \times \sqrt{\left(\frac{u(Q)}{Q}\right)^2 + \left(\frac{u(C_s)}{C_s}\right)^2} \quad \text{Eq. 4-21}$$

Dans le cas d'un flux de MES dans un réseau unitaire où la mesure de débit est caractérisée par une incertitude de l'ordre de +/- 12% et celle de concentration moyenne issue d'un prélèvement à pas de temps constant de +/- 10%, l'incertitude-type composée est de l'ordre de +/- 15%.

5 COMPOSITIONS DES INCERTITUDES SUR DES GRANDEURS INTEGREES DANS LE TEMPS

Ce chapitre est consacré à des mesurandes dérivés particuliers, issus de calculs d'intégration (cumuls, moyennes) portant sur des valeurs successives d'une ou plusieurs grandeurs pendant une durée T_e (cf. Figure 10). La durée T_e peut correspondre par exemple à une heure, une journée, un mois, un événement pluvieux, ou le cumul des événements pluvieux sur une année.

Outre la propagation des incertitudes affectant chaque valeur participant au calcul, il faut prendre en compte un type particulier d'erreur, dû à la discrétisation temporelle et à l'interpolation d'un signal continu. Ce chapitre commence donc par détailler ce type d'erreur, puis présente de manière générique l'analyse des incertitudes pour une grandeur quelconque intégrée dans le temps. Pour appliquer cette analyse aux mesures de concentrations, il faut tenir compte des stratégies de prélèvement. Celles-ci sont donc présentées et un deuxième type d'erreur de discrétisation est alors introduit : l'erreur de pondération, spécifique aux calculs de flux polluants. Enfin tous ces éléments sont appliqués au calcul d'incertitudes affectant différents types de grandeur intégrées.

5.1 Erreurs d'interpolation

Les calculs d'intégration d'une grandeur $f(t)$ variable dans le temps ne sont pas réalisés à partir d'une courbe continue de valeurs mesurées, mais à partir de n_e valeurs discrètes (ponctuelles) mesurées à des instants t_i . Ces instants sont séparés par des intervalles Δt_i (pas de temps d'échantillonnage) constants ou variables (cf. Figure 10). L'intégration de ces valeurs discrètes sur une durée T_e implique une interpolation des valeurs $f(t_i)$, par exemple une interpolation linéaire, ou une interpolation par paliers (Figure 11).

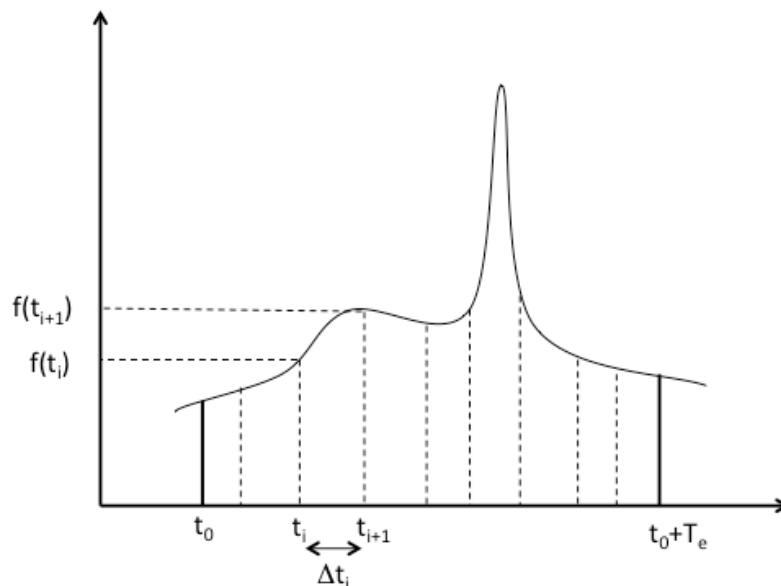


Figure 10 : Discretisation d'une grandeur en fonction du temps

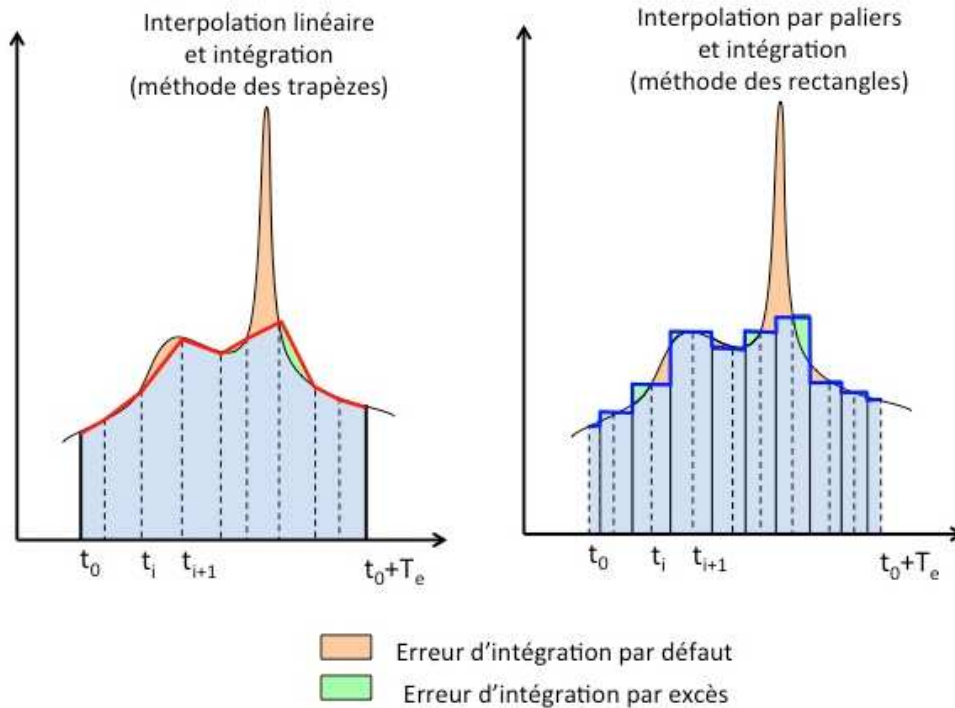


Figure 11 : Interpolation et intégration d'une grandeur variable en fonction du temps

L'écart $\varepsilon(t)$ entre la courbe interpolée et la courbe continue d'origine constitue **l'erreur d'interpolation**. L'erreur d'interpolation peut être caractérisée, après intégration, par un coefficient $K_{inter}(f)$.

Dans le cas d'une interpolation linéaire $K_{inter}(f)$ est défini comme :

$$K_{inter} = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T_e} f(t).dt}{\sum_{i=0}^{n_e-1} \frac{f(t_{i+1}) + f(t_i)}{2} \times \Delta t_i} \quad \text{Eq. 5-1}$$

En réalité ce coefficient dépend bien sûr de f , mais aussi des Δt_i , et du laps de temps $[t_0, t_0+T_e]$ sur lequel s'effectue l'intégration.

La valeur de K_{inter} est inconnue et peut être supérieure ou inférieure à 1. Sans information supplémentaire on supposera que $K_{inter} = 1$. On commet alors une erreur que l'on cherchera à caractériser par une incertitude sur K_{inter} . Celle-ci varie avec la durée d'intégration T_e : les plus longues durées permettent aux erreurs par excès et par défaut de se compenser et aboutissent à une erreur plus faible sur la valeur intégrée. L'erreur d'interpolation dépend également des pas de temps Δt_i et de la dynamique du signal : elle est plus faible pour des pas de temps courts vis à vis de l'échelle de temps des variations de la fonction $f(t)$.

Dans ce qui suit la fonction $f(t)$ sera un débit, une concentration ou un flux. Le calcul d'intégration peut être réalisé en temps réel, par le système d'acquisition. Dans ce cas le pas de temps d'échantillonnage est souvent très court (1s ou moins) et permet de calculer des valeurs moyennes sur des durées qui peuvent varier entre 1mn et 1 heure. Ce sont ces valeurs moyennes qui sont enregistrées, et l'erreur d'interpolation qui les affecte est négligeable. Ce cas de figure correspond aux enregistrements de mesures issues de capteurs: mesures de débit, de turbidité...

Le calcul d'intégration peut également être réalisé a posteriori, sur des valeurs enregistrées, sur des résultats d'analyse ou sur la combinaison des deux (calculs de flux). On est ainsi amené à distinguer deux pas de temps :

- Un pas de temps d'auscultation ou de lecture, qui constitue le pas de temps d'échantillonnage effectif
- Un pas de temps d'enregistrement, de valeurs échantillonnées à un pas de temps plus court, et en général intégrées dans une valeur moyenne avant enregistrement.

Les données enregistrées peuvent même être ré-échantillonnées par la suite à des pas de temps plus longs : l'heure ou la journée par exemple.

En règle générale, c'est la discrétisation d'origine (pas de temps d'auscultation) qui détermine l'erreur d'interpolation, qui n'est pas modifiée pas des intégrations ultérieure à des pas de temps plus longs.

Pour des résultats d'analyse et leur combinaison avec des enregistrements de débit il faut prendre en compte la stratégie de prélèvement (cf. section 5.3). Mais dans tous les cas le pas d'échantillonnage des concentrations (durée séparant deux prises de prélèvements) est de plusieurs minutes, voire 10 ou 15 mn, et introduit des erreurs de discrétisation qui peuvent ne pas être négligeables. Celles-ci restent impossibles à évaluer si on ne dispose pas d'autre information que les résultats d'analyse. En revanche si on dispose d'une mesure "en continu" d'un paramètre représentatif de la dynamique des concentrations (turbidité, conductivité) on peut simuler à partir de ces enregistrements les effets de la stratégie de prélèvement et les erreurs induites (cf. tâche 7 du projet MENTOR).

5.2 Calcul générique des incertitudes sur une grandeur intégrée dans le temps

Ce paragraphe présente sous une forme générique la propagation des incertitudes dans un calcul d'intégration. Il est destiné à faciliter la compréhension des applications détaillées dans la deuxième partie du chapitre, en explicitant les calculs de dérivation et les configurations limites pour les termes de covariance.

Si $f(t)$ désigne une grandeur variable dans le temps échantillonnée aux instants t_i , son intégration s'écrira (dans le cas d'une interpolation linéaire) :

$$F = \int_{t_0}^{t_0+T_e} f(t)dt = K_{inter} \sum_{i=1}^{n_e} f(t_i)\Delta t_i \quad \text{Eq. 5-2}$$

L'incertitude sur les Δt_i est en général négligeable et la propagation des incertitudes

sur les $f(t_i)$ dans la formule d'intégration s'écrit alors:

$$\frac{u^2(F)}{K_{inter}^2} = \left[\sum_{i=1}^{n_e} f(t_i) \Delta t_i \right]^2 \frac{u^2(K_{inter})}{K_{inter}^2} + \sum_{i=1}^{n_e} \left(\frac{\partial F}{\partial f(t_i)} \right)^2 \times u^2(\varepsilon_{f(t_i)}) + 2 \sum_{i=1}^{n_e-1} \sum_{j=i+1}^{n_e} \frac{\partial F}{\partial f(t_i)} \frac{\partial F}{\partial f(t_j)} u(\varepsilon_{f(t_i)}, \varepsilon_{f(t_j)})$$

Eq. 5-3

Les notations $u^2(\varepsilon_{f(t_i)})$ et $u(\varepsilon_{f(t_i)}, \varepsilon_{f(t_j)})$ ont été utilisées ici de préférence à $u^2(f(t_i))$ et $u(f(t_i), f(t_j))$ pour bien montrer que les covariances des erreurs sont distinctes des covariances des valeurs (cf. sous-section 2.4.3)

$$\frac{u^2(F)}{K_{inter}^2} = \left[\sum_{i=1}^{n_e} f(t_i) \Delta t_i \right]^2 \frac{u^2(K_{inter})}{K_{inter}^2} + \sum_{i=1}^{n_e} u^2(\varepsilon_{f(t_i)}) \Delta t_i + 2 \sum_{i=1}^{n_e-1} \sum_{j=i+1}^{n_e} u(\varepsilon_{f(t_i)}, \varepsilon_{f(t_j)}) \times \Delta t_i \times \Delta t_j$$

Eq. 5-4

On peut alors revenir aux notations classiques (voir encadré sous-section 2.4.4) :

$$\frac{u^2(F)}{K_{inter}^2} = \left[\sum_{i=1}^{n_e} f(t_i) \Delta t_i \right]^2 \frac{u^2(K_{inter})}{K_{inter}^2} + \sum_{i=1}^{n_e} u^2(f(t_i)) \Delta t_i + 2 \sum_{i=1}^{n_e-1} \sum_{j=i+1}^{n_e} r(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \times u(f(t_i)) \times u(f(t_j)) \times \Delta t_i \times \Delta t_j$$

Eq. 5-5

en posant $r(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = r(\varepsilon_{f(t_i)}, \varepsilon_{f(t_j)})$

Le terme de covariance est particulièrement complexe puisqu'il doit considérer les corrélations éventuelles $r(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ entre les erreurs affectant *toutes* les valeurs participant au calcul d'intégration *prises deux à deux*. Dans la suite nous nous contenterons de signaler si on les néglige ou pas, et dans ce dernier cas de les maximiser en supposant en général des erreurs systématiques parfaitement reproductibles ($r(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=1$).

Si les erreurs sont indépendantes ($r(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=0$) l'expression de l'incertitude devient :

$$u^2(F) = F^2 \frac{u^2(K_{inter})}{K_{inter}^2} + K_{inter}^2 \sum_{i=1}^{n_e} u_{f(t_i)}^2 \Delta t_i$$

Eq. 5-6

Si les erreurs sont parfaitement corrélées on aura donc :

$$\frac{u^2(F)}{K_{inter}^2} = \left[\sum_{i=1}^{n_e} f(t_i) \Delta t_i \right]^2 \frac{u^2(K_{inter})}{K_{inter}^2} + \sum_{i=1}^{n_e} u^2(f(t_i)) \times \Delta^2 t_i + 2 \sum_{i=1}^{n_e-1} \sum_{j=i+1}^{n_e} u(f(t_i)) \times u(f(t_j)) \times \Delta t_i \times \Delta t_j$$

Eq. 5-7

Soit :

$$u^2(F) = F^2 \frac{u^2(K_{inter})}{K_{inter}^2} + K_{inter}^2 \left(\sum_{i=1}^{n_e} u(f(t_i)) \times \Delta t_i \right)^2$$

Eq. 5-8

5.3 Stratégies de prélèvement

Il existe de nombreuses stratégies de prélèvement qui combinent les éléments suivants:

1. critère de départ
2. critère de prise d'échantillon
3. critère de changement de flacon (dans le cas d'un échantillonnage multiflacon)
4. critère d'arrêt

Les critères 1 et 4 définissent les limites de l'événement échantillonné (événement pluvieux ou journée de temps sec par exemple). Un événement est défini subjectivement (c'est l'opérateur qui décide de ses début et fin), et on négligera ici l'incertitude qui pourrait être associée à la détection du début et de la fin de l'événement.

Les critères 2 et 3 définissent la discrétisation des concentrations à l'intérieur de cet événement. Pour assurer la cohérence avec les définitions proposées dans la section 5.1, l'intervalle de temps entre deux prélèvements correspond au pas de temps d'échantillonnage (auscultation), et l'intervalle de temps entre deux changements de flacon correspond au pas de temps d'enregistrement. Dans la suite il sera essentiellement question du pas de temps entre deux prélèvements.

Les critères 2 et 3 peuvent être agrégés et réduits à deux stratégies-types :

- Prélèvement proportionnel aux temps: les prélèvements sont effectués à pas de temps fixe, et les changements de flacons éventuels (généralement 24 au maximum) correspondent à un nombre constant de prélèvements, et donc à un pas de temps fixe également (mais différent du précédent). Cette stratégie permet de maîtriser l'utilisation de la capacité de stockage des échantillons (volume du ou des flacons), et donc de couvrir la plupart des événements dans leur intégralité.
- Prélèvement proportionnel au volume: les prélèvements sont pilotés par un débitmètre, et sont effectués à pas de volume écoulé constant. Les changements de flacons éventuels correspondent à un nombre constant de prélèvements, et donc à un pas de volume fixe. Nous allons voir que cette stratégie réalise une moyenne de concentrations pondérée par les volumes écoulés, ce qui présente des avantages pour les calculs ultérieurs de flux polluants et de masses transitées.

Dans les deux cas, le préleveur réalise une intégration des concentrations par mélange de plusieurs prélèvements dans un même flacon. Dans un flacon donné, la concentration est la moyenne arithmétique des concentrations $C(t_i)$ des prélèvements (si le volume V_p prélevé à chaque prise est constant) :

$$C_{éch} = \frac{\sum_{i=1}^{n_e} C(t_i) \times V_p}{n_e V_p} = \frac{\sum_{i=1}^{n_e} C(t_i)}{n_e} \quad \text{Eq. 5-9}$$

- si le pas de temps d'échantillonnage Δt_i est constant et vaut Δt , on peut écrire :

$$C_{éch} = \frac{\sum_{i=1}^{n_e} C(t_i)}{n_e} = \frac{\sum_{i=1}^{n_e} C(t_i) \times \Delta t}{T_e} \quad \text{Eq. 5-10}$$

- si le pas de temps d'échantillonnage correspond à un volume écoulé constant ΔV_e , on aura $\Delta t_i = k_p \frac{\Delta V_e}{Q(t_i)}$ avec k_p coefficient de prélèvement (rapport du volume prélevé au volume écoulé) et $\bar{Q}(t_i)$ le débit moyen sur le pas de temps Δt_i , on peut alors écrire :

$$C_{éch} = \frac{\sum_{i=1}^{n_e} C(t_i)}{n_e} = \frac{\sum_{i=1}^{n_e} C(t_i) \times k_p \Delta V_e}{n_e k_p \Delta V_e} \quad \text{Eq. 5-11}$$

$$V_e C_{éch} = \sum_{i=1}^{n_e} C(t_i) \times \Delta V_e = \sum_{i=1}^{n_e} \bar{\Phi}(t_i) \times \Delta t_i = \frac{1}{K_{inter}(\Phi)} \times \int_{t_0}^{t_0+T_e} C(t) \times Q(t) \times dt \quad \text{Eq. 5-12}$$

avec $\bar{\Phi}_i(t_i) \Delta t_i = C(t_i) \Delta V_e = C(t_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} Q(t) dt$, V_e volume de l'événement, $K_{inter}(\Phi)$ le coefficient correcteur d'interpolation de la courbe des flux $\bar{\Phi}_i(t_i)$ discrétisés au pas de temps sur la période $[t_i; t_i + T_e]$. Donc :

$$C_{éch} = \frac{1}{K_{inter}(\Phi) \times V_e} \times \int_{t_0}^{t_0+T_e} C(t) \times Q(t) \times dt \quad \text{Eq. 5-13}$$

5.4 Concentration moyenne événementielle (C_e) déterminée par analyse d'un échantillon composite

La concentration moyenne C_e d'un événement est définie comme le rapport entre la masse totale de polluant M_e et le volume total V_e transités au cours de l'événement.

Elle peut être obtenue directement par analyse d'un échantillon composite obtenu par un prélèvement monoflacon (un seul flacon pour tout l'événement) **à pas de volume constant** : c'est alors le préleveur qui effectue le calcul d'intégration.

En effet, on a vu précédemment que dans ce

$$\text{cas } C_{\text{éch}} = \frac{1}{K_{\text{inter}}(\Phi) \times V_e} \times \int_{t_0}^{t_0+T_e} C(t) \times Q(t) \times dt.$$

Etant donné que :

$$M_e = \int_{t_0}^{t_0+T_e} C(t) \times Q(t) \times dt \quad \text{Eq. 5-14}$$

On a :

$$C_{\text{éch}} = \frac{M_e}{K_{\text{spa}} \times K_{\text{inter}}(\Phi) \times V_e} \quad \text{Eq. 5-15}$$

et

$$C_e = K_{\text{spa}} \times K_{\text{inter}}(\Phi) \times C_{\text{éch}} = f(K_{\text{spa}}, K_{\text{inter}}, C_{\text{éch}}) \quad \text{Eq. 5-16}$$

K_{spa} étant un coefficient d'extrapolation spatiale comme défini dans la section 4.3.

En appliquant à cette équation la formule de propagation des incertitudes sans corrélation entre les erreurs on obtient :

$$\begin{aligned} u^2(C_e) &= \left(\frac{\partial f}{\partial K_{\text{spa}}} \right)^2 \times u^2(K_{\text{spa}}) + \left(\frac{\partial f}{\partial K_{\text{inter}}} \right)^2 \times u^2(K_{\text{inter}}) + \left(\frac{\partial f}{\partial C_{\text{éch}}} \right)^2 \times u^2(C_{\text{éch}}) \\ &= (C_{\text{éch}} \times K_{\text{spa}})^2 \times u^2(K_{\text{inter}}) + (C_{\text{éch}} \times K_{\text{inter}})^2 \times u^2(K_{\text{spa}}) \\ &\quad + (K_{\text{spa}} \times K_{\text{inter}})^2 \times u^2(C_{\text{éch}}) \end{aligned} \quad \text{Eq. 5-17}$$

Si on utilise un échantillon monoflacon prélevé **à pas de temps constant**, il faut ajouter aux sources d'erreur précédentes une erreur de pondération. En effet dans le cas général la masse événementielle n'est pas égale au produit du volume par la moyenne arithmétique des concentrations :

$$C_{\text{éch}} V_e = \frac{1}{n_e} \sum_{i=1}^{n_e} C(t_i) \times \sum_{i=1}^{n_e} \Delta V_i \neq \sum_{i=1}^{n_e} C(t_i) \times \Delta V_i = \frac{M_e}{K_{\text{spa}} \times K_{\text{inter}}} \quad \text{Eq. 5-18}$$

Le pas de volume ΔV_i (ou ΔV_e dans l'équation 5.4) agit comme une pondération dans le calcul de concentration moyenne. Le prélèvement à pas de temps constant produit une moyenne non pondérée et on peut définir :

$$K_{pond} = \frac{\sum_{i=1}^{n_e} C(t_i) \times \Delta V_i}{\sum_{i=1}^{n_e} C(t_i) \times \sum_{i=1}^{n_e} \Delta V_i} \quad \text{Eq. 5-19}$$

En faisant l'hypothèse que $K_{pond}=1$, on commet une erreur que l'on cherchera à caractériser par une incertitude sur K_{pond} . On obtient donc l'expression de la concentration événementielle et de son incertitude :

$$C_e = K_{pond} \times K_{inter} \times K_{spa} \times C_{éch} \quad \text{Eq. 5-20}$$

$$\begin{aligned} u^2(C_e) &= \left(\frac{\partial f}{\partial K_{pond}} \right)^2 \times u^2(K_{pond}) + \left(\frac{\partial f}{\partial K_{inter}} \right)^2 \times u^2(K_{inter}) \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial K_{spa}} \right)^2 \times u^2(K_{spa}) + \left(\frac{\partial f}{\partial C_{éch}} \right)^2 \times u^2(C_{éch}) + \\ &= (C_{éch} \times K_{spa} \times K_{inter})^2 \times u^2(K_{pond}) + (C_{éch} \times K_{spa} \times K_{pond})^2 \times u^2(K_{inter}) \\ &+ (C_{éch} \times K_{pond} \times K_{inter})^2 \times u^2(K_{spa}) + (K_{spa} \times K_{pond} \times K_{inter})^2 \times u^2(C_{éch}) \end{aligned} \quad \text{Eq. 5-21}$$

Lors d'un livrable précédent de la tâche 7 du projet Mentor (Hannouche et al., 2014), les coefficients K_{pond} et K_{inter} , regroupés sous un même coefficient K_{temp} (produit des 2 précédents pour un prélèvement à pas de temps constant et uniquement K_{inter} pour un prélèvement à volume constant) ont été déterminés sur un grand nombre d'événements pluvieux et de temps sec (à partir de données provenant de mesures en continu de débit et de turbidité sur les sites unitaires de Clichy à Paris, Duchesse Anne à Nantes, Ecully à Lyon et sur les sites séparatifs pluviaux de Sucy-en-Brie et Chassieu à Lyon). Pour chaque événement, la concentration moyenne événementielle a été estimée d'une part à l'aide des données de débit et turbidité, et d'autre part par simulation de prélèvement. Le ratio entre ces deux valeurs (celle calculée à l'aide la turbidité étant utilisée comme référence) a permis de définir un coefficient K_{temp} pour chaque événement.

A partir de la distribution de K_{temp} ainsi obtenue, une incertitude-type (écart-type) a été définie. Elle correspond à une valeur de l'ordre de +/- 10% par temps de pluie, quel que soit le type de réseau (unitaire ou séparatif pluvial) pour un asservissement en volume, et autour de respectivement +/- 15% (réseau unitaire) et +/- 20% (séparatif pluvial) pour un asservissement en temps. Par temps sec (eaux usées), cette incertitude est de l'ordre de +/- 5% pour l'asservissement en volume et de +/- 8% pour l'asservissement en temps.

Une valeur majorée de l'incertitude sur K_{spa} peut être prise égale à celle définie pour la concentration de prélèvement C_p : +/- 10%

Par composition, on obtient l'incertitude-type totale :

- Par temps de pluie on a obtenu :

+/- 15% pour un prélèvement en volume quel que soit le type de réseau
 +/- 20% pour un prélèvement en temps pour un réseau unitaire et +/- 25%
 pour du séparatif pluvial

- Par temps sec on obtient :
 +/- 12% pour un prélèvement en volume
 +/- 15% pour un prélèvement en temps

5.5 Volume événementiel (V_e)

On dispose ici d'un hydrogramme (enregistrement de mesures successives de débit $Q(t_i)$) et on souhaite en déduire un volume sur une durée T_e (heure, jour, événement pluvieux...).

$$V_e = K_{inter} \sum_{i=1}^{n_e} Q(t_i) \times \Delta t_i \quad \text{Eq. 5-22}$$

La composante systématique de l'erreur sur les débits n'est sans doute pas négligeable, et les erreurs affectant les mesures successives de débits sont vraisemblablement corrélées. Dans ce cas, et sans autre information sur l'importance de cette corrélation, la prudence suggère de réaliser le calcul pour le cas le plus défavorable : $r(\varepsilon_{Q_i}, \varepsilon_{Q_j}) = 1$

$$u^2(V_e) = V_e^2 \frac{u^2(K_{inter})}{K_{inter}^2} + K_{inter}^2 \left(\sum_{i=1}^{n_e} u(Q(t_i)) \times \Delta t_i \right)^2 \quad \text{Eq. 5-23}$$

Dans le cas particulier où l'incertitude relative sur le débit instantané serait constante,

$u(Q(t_i)) = kQ(t_i)$ et :

$$u^2(V_e) = V_e^2 \frac{u^2(K_{inter})}{K_{inter}^2} + K_{inter}^2 \left(\sum_{i=1}^{n_e} kQ(t_i) \times \Delta t_i \right)^2 \quad \text{Eq. 5-24}$$

$$u^2(V_e) = V_e^2 \frac{u^2(K_{inter})}{K_{inter}^2} + k^2 V_e^2 \quad \text{Eq. 5-25}$$

$$\frac{u^2(V_e)}{V_e^2} = \frac{u^2(K_{inter})}{K_{inter}^2} + \frac{u^2(Q)}{Q^2} \quad \text{Eq. 5-26}$$

$$\frac{u(V_e)}{V_e} = \sqrt{\frac{u^2(K_{inter})}{K_{inter}^2} + \frac{u^2(Q)}{Q^2}} \quad \text{Eq. 5-27}$$

Cependant si on a de bonnes raisons de penser que la composante systématique n'est pas prépondérante, on peut négliger la corrélation entre ε_{Q_i} et ε_{Q_j} (erreurs aléatoires) : $r(\varepsilon_{Q_i}, \varepsilon_{Q_j}) = 0$

$$u^2(V_e) = V_e^2 \frac{u^2(K_{inter})}{K_{inter}^2} + K_{inter}^2 \sum_{i=1}^{n_e} u^2(Q(t_i)) \times \Delta t_i^2 \quad \text{Eq. 5-28}$$

$$u(V_e) = \sqrt{V_e^2 \frac{u^2(K_{inter})}{K_{inter}^2} + K_{inter}^2 \sum_{i=1}^{n_e} u^2(Q(t_i)) \times \Delta t_i^2} \quad \text{Eq. 5-29}$$

Un exemple de calcul se trouve dans l'outil correspondant (Feuille 5.5) pour la méthode des rectangles en précisant les deux cas d'erreurs aléatoires et systématiques. Il s'agit là d'un épisode pluvieux pour lequel on dispose de données de débit à un pas de temps de 1 minute. Dans le cas où les erreurs sur les débits instantanés sont aléatoires, on obtient –pour cet exemple !- une incertitude-type composée sur le volume cumulé sur 7 heures de $\pm 2\%$. Si ces erreurs sont systématiques on obtient $\pm 11\%$. Dans le premier cas les erreurs aléatoires sur les valeurs successives se compensent, dans le deuxième cas les erreurs systématiques se cumulent comme la valeur mesurée.

5.6 Masse événementielle calculée à partir du volume et de la concentration d'un échantillon moyen composite

La masse événementielle d'un polluant est déterminée à l'aide du produit entre le volume de l'événement V_e et la concentration moyenne événementielle sur un échantillon extrapolée à l'ensemble de la section C_e :

$$M_e = f(C_e, V_e) = C_e \times V_e \quad \text{Eq. 5-30}$$

La formule générale de propagation des incertitudes s'écrit :

$$u^2(M_e) = \left(\frac{\partial f}{\partial C_e}\right)^2 \times u^2(C_e) + \left(\frac{\partial f}{\partial V_e}\right)^2 \times u^2(V_e) + 2 \times \frac{\partial f}{\partial C_e} \times \frac{\partial f}{\partial V_e} \times u(C_e, V_e) \quad \text{Eq. 5-31}$$

L'erreur (absolue) sur le volume est liée aux erreurs sur les débits, qui elles-mêmes peuvent dépendre de la valeur du débit (voir sous-section précédente). L'erreur sur la concentration moyenne, en particulier l'erreur d'extrapolation spatiale d'une valeur locale à la moyenne dans la section, peut éventuellement dépendre des valeurs de débits. On pourrait donc souhaiter sécuriser le calcul en majorant la corrélation entre ces deux erreurs. Mais en l'absence d'informations plus précises, il est possible de négliger ces composantes systématiques qui pourraient être corrélées. On peut alors écrire :

$$u^2(M_e) = \left(\frac{\partial f}{\partial C_e}\right)^2 \times u^2(C_e) + \left(\frac{\partial f}{\partial V_e}\right)^2 \times u^2(V_e) = V_e^2 \times u^2(C_e) + C_e^2 \times u^2(V_e) \quad \text{Eq. 5-32}$$

Dans l'exemple que l'on retrouve dans la feuille de calcul 5.6, on reprend l'incertitude obtenue sur le volume en 5.5 (cas d'erreurs aléatoires : 2%) et celle obtenue pour une concentration moyenne égale à 12%. Après composition, on trouve pour cet exemple une incertitude-type composée de l'ordre de +/- 12% (sans corrélation entre C_e et V_e) ou 13% (avec corrélation).

5.7 Masse événementielle calculée à partir d'un hydrogramme et d'un pollutogramme de concentration

Lors d'un événement pluvieux de durée T_e , on prélève n_e flacons qui sont analysés en laboratoire pour déterminer les n_e concentrations $C_s(t_i)$ permettant de tracer un pollutogramme (cf. Figure 12). On dispose par ailleurs d'un enregistrement du débit (avec des pas d'enregistrement δt_j) et on souhaite déterminer la masse M_e de polluant (par exemple de MES) transportée lors de cet événement.

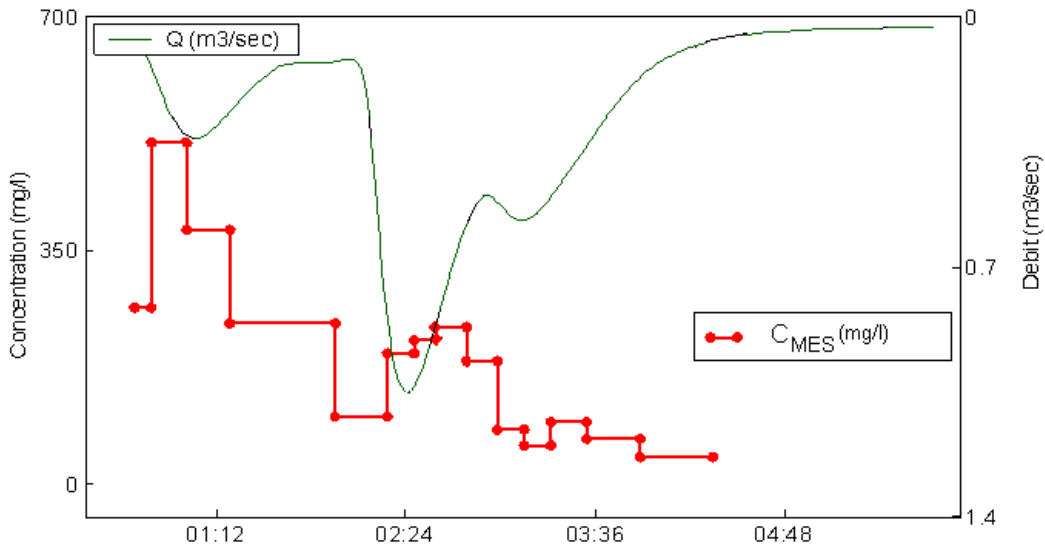


Figure 12: correspondance entre hydrogramme et pollutogramme pour un événement pluvieux

En faisant l'hypothèse que la concentration $C_s(t_i)$ du flacon i représente celle du volume transporté ΔV_i entre le remplissage de deux flacons i et $i-1$ (c'est en particulier le cas s'il y a plusieurs prises par flacon), la masse événementielle vaut :

$$M_e = \int_{t_0}^{t_0+T_e} Q(t) \times C_s(t) dt = K_{inter}(\Phi) \times \sum_{i=1}^{n_e} \Phi(t_i) \times \Delta t_i = K_{inter}(\Phi) \times K_{pond} \times \sum_{i=1}^{n_e} C_s(t_i) \times \Delta V_i \quad \text{Eq. 5-33}$$

Avec : $\Delta V_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} Q(t) dt$ et $\Phi(t_i) = C_s(t_i) \Delta(V_i)$

$K_{inter}(\Phi)$ désigne le coefficient correcteur d'interpolation de la courbe des flux $\Phi(t_i)$ discrétisée au pas de temps Δt_i sur la période $[t_i, t_i+T_e]$

Les sources d'incertitude proviennent ici

- des erreurs affectant les grandeurs intégrées ΔV_i , et les résultats d'analyse $C_s(t_i)$
- de la représentativité spatiale des prélèvements (erreurs incluses dans l'incertitude sur les $C_s(t_i)$)
- de la discrétisation temporelle des concentrations et des débits.

5.7.1 Prélèvement à pas de temps constant

Le volume d'eau transité entre le remplissage de deux flacons i et $i-1$ est variable et calculé par intégration en temps différé des mesures de débit mesurés :

$$\Delta V_i = K_{inter}(Q, \Delta t_i) \sum_{t=t_{i-1}}^{t=t_i} Q(t) \times \delta t \quad \text{Eq. 5-34}$$

En toute rigueur le coefficient d'interpolation $K_{inter}(Q, \Delta t_i)$ est différent pour chaque pas de temps du pollutogramme de concentration, et son incertitude aussi. En pratique on prend $K_{inter}(Q, \Delta t_i) = 1$ et on néglige son incertitude car δt est petit.

Si on néglige les corrélations entre les erreurs sur K_{pond} , $K_{inter}(\Phi)$, ΔV_i et $C_s(t_i)$ (mais pas celles entre les pas de volume ΔV_i et ΔV_j), la propagation des incertitudes dans l'équation précédente s'écrit :

$$u(M_e) = M_e \times \left[\frac{\left(\frac{u(K_{pond})}{K_{pond}} \right)^2 + \left(\frac{u(K_{inter}(\Phi))}{K_{inter}(\Phi)} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n_e} (\Delta V_i^2 \times u^2(C_s(t_i)) + C_s^2(t_i) \times u^2(\Delta V_i))}{\left(\sum_{i=1}^{n_e} \Delta V_i \times C_s(t_i) \right)^2} + \frac{2 \times \sum_{i=1}^{n_e-1} \sum_{j=i+1}^{n_e} (C_s(t_i) \times C_s(t_j) \times u(\Delta V_i, \Delta V_j))}{\left(\sum_{i=1}^{n_e} \Delta V_i \times C_s(t_i) \right)^2} \right] \quad \text{Eq. 5-35}$$

Les incertitudes types sur les volumes $u(\Delta V_i)$ se calculent comme indiqué en section 5.5, celles sur les concentration en 4.3 et celles sur K_{pond} et K_{inter} en 5.4.

5.7.2 Prélèvement à pas de volume constant

Le volume d'eau transité entre le remplissage de deux flacons i et $i-1$ est à peu près constant car évalué par intégration en temps réel des mesures de débit mesurés (cf. équation 5-33).

L'enregistrement de l'hydrogramme n'est pas nécessaire pour calculer la masse : le nombre de prélèvements permet de calculer le volume écoulé V_e . Pour obtenir la masse événementielle M_e il suffit de multiplier ce volume par la concentration moyenne calculée à partir des résultats d'analyse effectués sur chaque prélèvement (on pourrait même obtenir directement cette moyenne en mélangeant tous les échantillons...).

En revanche l'hydrogramme est nécessaire pour évaluer les incertitudes sur les ΔV_i , car même si ces derniers correspondent tous à la même valeur mesurée, ils correspondent en réalité à des mesurands différents : les volumes successifs écoulés entre deux prélèvements. Les erreurs les affectant seront donc différentes et le calcul d'incertitudes se fera de la même manière que pour les prélèvements proportionnel au temps (mais sans introduire le facteur correctif K_{pond} , ni bien sûr l'incertitude correspondante).

$$u(M_e) = M_e \times \sqrt{\frac{u^2(K_{inter}) + \sum_{i=1}^{n_e} (\Delta V_i^2 \times u^2(C_s(t_i)) + C_s^2(t_i) \times u^2(\Delta V_i))}{K_{inter}^2} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n_e} \Delta V_i \times C_s(t_i)\right)^2}{2 \times \sum_{i=1}^{n_e-1} \sum_{j=i+1}^{n_e} (C_s(t_i) \times C_s(t_j) \times u(\Delta V_i, \Delta V_j))} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n_e} \Delta V_i \times C_s(t_i)\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n_e} \Delta V_i \times C_s(t_i)\right)^2}} \quad \text{Eq. 5-36}$$

Dans l'outil fourni avec ce guide, on présente sur la feuille 5.7 un exemple concernant la méthode à pas de volume constant. Pendant cet événement pluvieux, 14 flacons ont été prélevés, à raison de 4 prises par flacon. En considérant une incertitude de 15% sur les mesures de concentration, de 8% sur les ΔV_i (supposés constants), et de 10% sur le coefficient K_{inter} , on obtient une incertitude composée de l'ordre de +/- 11% (sans corrélation entre ΔV_i) ou de 13% (avec corrélation) sur la masse événementielle.

5.8 Masse événementielle calculée à partir d'un hydrogramme et d'un pollutogramme de turbidité

Dans ce cas, on dispose de mesures en continu de débit $Q(t_i)$ et de turbidité $T_u(t_i)$ aux mêmes instants t_i séparés par des pas de temps Δt_i (si ce n'est pas le cas on ré-échantillonne les deux enregistrements pour les synchroniser). Soit n_e le nombre de pas de temps sur l'événement. La turbidité est convertie en concentration $C_s(t_i)$ comme indiqué dans la section 4.5. On retrouve un cas de figure analogue à celui qui a été étudié au 5.7 pour la masse calculée à partir d'un pollutogramme issu de prélèvements échantillonnés proportionnellement au temps et la masse événementielle peut être calculée à l'aide de l'équation suivante :

$$M_e = \int_{t_0}^{t_0+T_e} Q(t) \times C_s(t) dt = K_{pond} \times K_{inter} \times \sum_{i=1}^{n_e} C_s(t_i) \times Q_i \times \Delta t_i$$

$$= K_{pond} \times K_{inter} \times \sum_{i=1}^{n_e} C_s(t_i) \times \Delta V_i \quad \text{Eq. 5-37}$$

On peut ici négliger les erreurs sur K_{pond} et K_{inter} . En effet celles-ci sont aléatoires, et comme Δt_i est en général très court vis à vis de la durée T_e de l'événement, le nombre n_e de valeurs participant à l'intégration est élevé, si bien que les erreurs se compenseront.

La principale différence réside dans l'incertitude sur les concentrations obtenues par la relation de pseudo-étalonnage turbidité-MES (cf. section 4.5).

Si l'on suppose que les erreurs résiduelles successives impliquées par la relation Turbidité-MES ne sont pas corrélées entre elles, et ne sont pas corrélées aux erreurs sur les débits, l'incertitude type sur la masse événementielle s'écrit :

$$u(M_e) = M_e \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_e} (\Delta V_i^2 \times u^2(C_s(t_i)) + C_s^2(t_i) \times u^2(\Delta V_i)) + \dots}{\left(\sum_{i=1}^{n_e} \Delta V_i \times C_s(t_i)\right)^2} + \frac{2 \times \sum_{i=1}^{n_e-1} \sum_{j=i+1}^{n_e} (C_s(t_i) \times C_s(t_j) \times u(\Delta V_i, \Delta V_j))}{\left(\sum_{i=1}^{n_e} \Delta V_i \times C_s(t_i)\right)^2}} \quad \text{Eq. 5-38}$$

Dans l'exemple que l'on retrouve sur la feuille 5.8 de l'outil, on présente les mesures de débit et de turbidité obtenues pour un événement pluvieux à un pas de temps de 1 minute. En reportant des incertitudes-types de 10% sur ces deux mesures, et une incertitude sur les concentrations en MES émanant de la régression autour de 12%, on obtient une incertitude composée de l'ordre de 1% (valeur très faible due à l'hypothèse de la seule présence d'une incertitude aléatoire). Dans le cas d'une erreur systématique due à la relation MES-turbidité, cette incertitude peut atteindre 25% (cf. Livrable 1 de la tâche 7 de Mentor ou Hannouche et al., 2015).

5.9 Concentration événementielle calculée à partir d'un pollutogramme et d'un hydrogramme

Les masses événementielles calculées en 5.6 et 5.7 peuvent être utilisées pour calculer des concentrations moyennes événementielles en les ramenant aux volumes correspondants évalués à partir des hydrogrammes (comme illustré Figure 13) :

$$C_e = \frac{M_e}{V_e} \quad \text{Eq. 5-39}$$

Les incertitudes sur M_e et V_e sont estimées comme présentées dans les sections précédentes.

Si on néglige la corrélation entre les erreurs sur la masse et sur le volume (l'hypothèse que ces deux variables soient indépendantes est assez peu probable), l'incertitude résultante s'exprime alors comme suit :

$$u(C_e) = C_e \times \sqrt{\left(\frac{u(M_e)}{M_e}\right)^2 + \left(\frac{u(V_e)}{V_e}\right)^2} \quad \text{Eq. 5-40}$$

C'est en réalité un majorant de l'incertitude, car le terme exprimant la relation de corrélation positive entre masse et volume (puisque la masse utilise les mêmes mesures de débit que celles qui sont utilisées pour le volume) engendrerait un terme négatif dans l'expression de l'incertitude composée qui tenterait à diminuer l'incertitude. Par précaution, on prend donc la formule ci-dessus. Dans le cas où la corrélation entre masse et volume vaut 1, on aurait l'expression suivante :

$$u(C_e) = C_e \times \left| \frac{u(M)}{M} - \frac{u(V)}{V} \right| < C_e \times \sqrt{\left(\frac{u(M)}{M}\right)^2 + \left(\frac{u(V)}{V}\right)^2} \quad \text{Eq. 5-41}$$

En reprenant l'exemple de l'événement présenté sur la feuille 7.5 de l'outil, la feuille 7.9 considère des incertitudes sur V_e et M_e de respectivement 2 et 1 %, et estime une incertitude composée sur la concentration moyenne événementielle de +/- 2,5%.

5.10 Concentration moyenne inter-événementielle et concentration caractéristique

Pour un site donné, on dispose de plusieurs événements (M) dont on a mesuré pour chacun la concentration moyenne C_j et les volumes V_j . Ces mesures permettent d'estimer les volumes et masses événementielles (voir sections précédentes) :

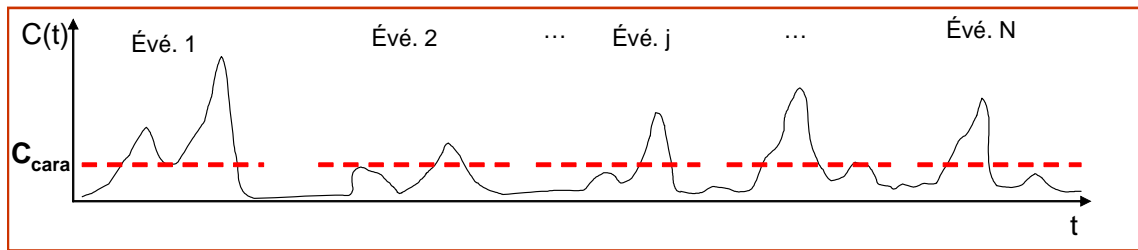


Figure 13 : Pollutogramme de N événements pluvieux

Sur ces N événements, les valeurs de volumes et masses événementielles permettent de déterminer une concentration moyenne inter-événementielle C_{mie} :

$$C_{mie} = \frac{\sum_{j=1}^N M_j}{\sum_{j=1}^N V_j} \quad \text{Eq. 5-42}$$

L'incertitude sur C_{mie} s'exprime (on néglige les corrélations entre les erreurs de mesure sur les masses et sur les volumes) :

$$u(C_{mie}) = C_{mie} \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N u^2(M_j) + \sum_{i=1}^N u^2(V_j)}{\left(\sum_{i=1}^N M_j\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N V_j\right)^2}} \quad \text{Eq. 5-43}$$

Les incertitudes sur les volumes $u(V_j)$ sont déterminées comme présentées en section 5.5. Concernant celles relatives aux masses M_j , il y a deux possibilités :

- Soit on dispose de mesures de concentrations moyennes événementielles C_j (par analyse en laboratoire sur prélèvement moyen asservi au volume) dont on se sert pour déterminer la masse M_j et des incertitudes de mesure correspondantes $u(M_j)$ comme présenté en section 5.6.
- Soit on dispose d'un pollutogramme dont on se sert pour déterminer la masse M_j et des incertitudes correspondantes $u(M_j)$ comme présenté en section 5.7.

La concentration caractéristique (du site) est déterminée à l'aide de la concentration inter-événementielle pour évaluer des masses de polluant à partir de mesures ou d'estimations de volume. Elle correspond à une concentration moyenne inter-événementielle regroupant toute la population des événements observables sur le site. La concentration inter-événementielle calculée à partir d'un échantillon de N événements observés n'est qu'un estimateur (au sens statistique du terme) de la concentration caractéristique, qui est donc évaluée avec une incertitude :

On a donc :

$$C_{cara} \approx C_{mie} \quad \text{Eq. 5-44}$$

Et :

$$u^2(C_{cara}) = u^2(C_{mie}) + u^2_{obs} \quad \text{Eq. 5-45}$$

Avec u_{obs} , incertitude attachée à l'échantillon d'événements observés utilisés pour calculer l'estimateur C_{mie} .

Pour estimer u_{obs} , c'est-à-dire la dispersion de C_{mie} qui serait observée pour différents jeux de N événements, on peut faire des simulations de Monte Carlo, en tirant aléatoirement des valeurs de C_j et V_j dans des distributions préalablement établies grâce aux N événements. On peut ainsi exprimer C_{mie} sous la forme :

$$C_{mie} = \frac{\sum_{j=1}^N C_j \times V_j}{\sum_{j=1}^N V_j} \quad \text{Eq. 5-46}$$

L'incertitude sur C_{mie} pourrait correspondre à l'écart-type déterminé à partir de la distribution de C_{mie} ainsi obtenue.

Il est aussi possible d'utiliser une solution approchée permettant d'estimer l'écart-type $\sigma(C_{mie})$, par exemple celle de Cochran (1977) :

$$u_{obs} = \sigma(C_{mie}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1) \times \bar{V}^2} \times \left(\sum_{j=1}^N (V_j \times C_j - \bar{V} \times C_{mie})^2 + C_{mie}^2 \times \sum_{j=1}^N (V_j - \bar{V})^2 \right) - \frac{2C_{mie}}{N(N-1) \times \bar{V}^2} \times \sum_{j=1}^N (V_j - \bar{V})(V_j \times C_j - \bar{V} \times C_{mie})}$$

Eq. 5-47

avec : $\bar{V} = \frac{\sum_{j=1}^N V_j}{N}$

Le deuxième terme sous le radical est un terme de covariance, qui sera très faible si les variations de volumes et de concentrations moyennes d'un événement à l'autre sont indépendantes.

L'exemple présent dans l'outil sur la feuille 5.10 correspond à des estimations de volume et de concentration pour 12 événements, auxquelles on a assigné des incertitudes de l'ordre de 2% (sur le volume, voir 5.5) et de 6% (sur la concentration). Cet exemple illustre une grande disparité entre les valeurs de $u(C_{mie})$ et u_{obs} , proche de 0,5% pour $u(C_{mie})$ et de l'ordre de 12% pour u_{obs} (si on ne tient pas compte des termes de covariances relatifs à la corrélation entre volume et masse événementielle, on obtient une valeur supérieure de l'ordre de 20%). En effet, l'incertitude composée est très sensible au nombre d'événements pluvieux utilisés pour déterminer la concentration caractéristique du site (plus celui-ci est faible et plus l'incertitude qu'elle engendre sera forte).

5.11 Masse annuelle (M_{an})

Dans ce dernier cas, on dispose des hydrogrammes de tous (N_{an}) les événements pluvieux sur une année qui permettent de déterminer les volumes écoulés V_k , ainsi que de N événements à partir desquels on a pu estimer la concentration caractéristique comme présentée en section 5.10. Il est alors possible de déterminer la masse cumulée M_{an} de polluant transportée sur cette période à partir de l'équation suivante :

$$M_{an} = C_{cara} \times \sum_{k=1}^{N_{an}} V_k$$

Eq. 5-48

Les incertitudes sur C_{cara} et sur les V_k sont estimées comme présentées dans les sections précédentes et si on suppose que toutes les erreurs sont indépendantes (donc corrélées), elles peuvent être combinées de la manière suivante :

$$u(M_{an}) = M_{an} \times \sqrt{\left(\frac{u(C_{cara})}{C_{cara}}\right)^2 + \frac{\sum_{k=1}^{N_{an}} u^2(V_k)}{\left(\sum_{k=1}^{N_{an}} V_k\right)^2}} \quad \text{Eq. 5-49}$$

Si on considère que les erreurs sur les volumes sont essentiellement systématiques, mais indépendantes des erreurs sur C_{cara} on obtiendra :

$$u(M_{an}) = M_{an} \times \sqrt{\left(\frac{u(C_{cara})}{C_{cara}}\right)^2 + \frac{\sum_{k=1}^{N_{an}} u(V_k)}{\sum_{k=1}^{N_{an}} V_k}} \quad \text{Eq. 5-50}$$

Dans la feuille 5.11 de l'outil, on retrouve un exemple présentant les estimations de volumes événementiels obtenus pour 88 événements lors d'une année de mesure. Chacune de ces valeurs est assortie d'une valeur d'incertitude autour de 2% (pas d'erreur systématique sur les mesures de débit). En multipliant ces valeurs par l'estimation de la concentration caractéristique effectuée en section 5.10 et en prenant en compte l'incertitude associée (12%), on obtient une incertitude composée du même ordre de grandeur : +/- 13%.

6 CONCLUSIONS ET TABLEAU DE SYNTHÈSE

Les auteurs de ce guide se sont efforcés de démontrer que la mise en œuvre d'une démarche métrologique rigoureuse passe nécessairement par une estimation assez précise des incertitudes. Ce document présente d'une manière détaillée la démarche et les méthodes de calcul à mettre en œuvre pour évaluer les incertitudes affectant les mesurandes primaires classiquement suivis en réseaux d'assainissement, ainsi que de nombreuses grandeurs dérivées des ces mesurandes primaires, en particulier des grandeurs intégrées dans le temps (volumes, masses, concentrations moyenne)

L'accent a été mis sur la nécessité d'avoir une connaissance assez poussée des phénomènes mis en jeu lors du processus de mesure. En effet les calculs, parfois complexes, impliqués par l'évaluation des incertitudes sur les grandeurs dérivées ne doivent pas masquer le rôle fondamental des hypothèses faites sur les erreurs affectant les mesurandes primaires. Les limites inévitables de ces connaissances et de ces hypothèses n'ont pas été éludées et des propositions pour les gérer ont été formulées, en particulier pour ce qui concerne la question clé du caractère aléatoire ou systématique des erreurs et plus généralement du caractère indépendant ou corrélé des erreurs commises sur différentes grandeurs.

Le suivi de la qualité par prélèvements et analyse pose des problèmes délicats pour évaluer l'incertitude associée à l'échantillonnage temporel. Des enregistrements complémentaires de paramètres globaux, tels que la conductivité et la turbidité, peuvent apporter des informations précieuses sur la dynamique des paramètres analysés et évaluer les incertitudes d'échantillonnage par simulation des stratégies de prélèvement.

Enfin il est important d'insister sur la qualité de la main d'œuvre et sur sa formation. La mise en place d'un système de mesure peut représenter une source d'erreur considérable en instrumentation. La qualité et l'expérience des opérateurs, tant dans la réalisation des protocoles que lors de l'estimation des incertitudes associées aux mesures, ne doivent donc pas être négligées. Le personnel engagé dans cette démarche de qualité devra être accompagné d'une formation rigoureuse.

Pour finir sur une note concrète, le tableau ci-dessous récapitule des ordres de grandeur possibles que l'on peut rencontrer pour des incertitudes relatives à des mesurages en réseaux d'assainissement. **Ces valeurs sont à considérer à titre purement indicatif car elles dépendent fortement du site de mesure, des hypothèses effectuées, et de la valeur mesurée. Il est très vivement recommandé de les déterminer spécifiquement pour chaque site d'étude considéré à l'aide des outils et méthodes proposés dans ce guide.**

Mesurande	Sources d'incertitude	Valeur indicative de l'incertitude
Hauteur d'eau (ultrasons)	- Appareil - Position du capteur - Célérité des ultrasons dans l'air (profil de température)	+/- 1%
Hauteur d'eau (piézométrie)	- Appareil - Position du capteur - Masse volumique de l'eau	+/- 1%
Concentration par analyse sur un prélèvement	- Transport et conservation de l'échantillon - Méthode analytique	+/- 5%
Vitesse dans une section (temps de transit)	- Appareil - Célérité des ultrasons dans l'eau (température, salinité) - Position des capteurs - Champ de vitesse	+/- 20%
Vitesse dans une section (Doppler)	- Appareil - Célérité des ultrasons dans l'eau (température, salinité) - Position des capteurs - champ de vitesse	+/- 20%
Débit	- Hauteur d'eau - Vitesse - Relation hauteur/section mouillée	+/- 20%
Turbidité moyenne dans une section	- Appareil - Etalonnage (solutions étalons et courbe d'étalonnage) - Variabilité du mesurande - Représentativité spatiale	+/- 15%
Concentration moyenne en MES dans une section (à partir de prélèvements)	- Représentativité spatiale du point de prélèvement - Analyse	+/- 10%
Concentration moyenne dans une section (à partir de la turbidité)	- Mesure de turbidité et extrapolation à la moyenne - Relation turbidité/MES - Capacité de prédiction de la relation turbidité/MES	+/- 10% à +/- 30% en fonction du nb d'événements de calibration de la relation MES turbidité
Flux instantané	- Mesure de débit - Evaluation de la concentration moyenne	+/- 15%

Concentration moyenne événementielle (à l'aide d'échantillons)	<ul style="list-style-type: none"> - Représentativité spatiale et temporelle (pondération et interpolation) des échantillons - Concentration mesurée des prélèvements 	<p>+/- 10% - 15% pour un prélèvement asservi au volume</p> <p>+/- 15% - 20% pour un prélèvement asservi au temps</p>
Volume événementiel	<ul style="list-style-type: none"> - Mesure des débits - Méthode de discrétisation 	+/- 10%
Masse événementielle (en fonction du volume et de la concentration)	<ul style="list-style-type: none"> - Mesure des débits - Analyse des concentrations - Incertitude d'échantillonnage 	+/- 15%
Masse événementielle (en fonction du débit et de la concentration)	<ul style="list-style-type: none"> - Mesure des débits - Analyse des concentrations - Incertitude d'échantillonnage 	+/- 15%
Masse événementielle (en fonction du débit et de la concentration estimée par la turbidité)	<ul style="list-style-type: none"> - Mesure des débits - Estimation des MES à l'aide de la turbidité 	+/- 25%
Concentration événementielle	<ul style="list-style-type: none"> - Evaluation des volumes - Evaluation des masses 	+/- 2,5%
Concentration caractéristique	<ul style="list-style-type: none"> - Echantillonnage des événements - Evaluation des concentrations - Evaluation des volumes 	+/- 20%
Masse annuelle	<ul style="list-style-type: none"> - Echantillonnage des événements - Evaluation des concentrations - Estimation des volumes 	+/- 15%

REFENRECES BIBLIOGRAPHIQUES

NF EN ISO 7027 (2000) : Qualité de l'eau - Détermination de la turbidité

NF EN ISO 6416 (2005) : Hydrométrie – Mesure du débit à l'aide de la méthode ultrasonique (acoustique)

2009/90/CE : Directive établissant, suivant la Directive 2000/60/CE du Parlement européen et du Conseil, des spécifications techniques pour l'analyse chimique et la surveillance de l'état des masses d'eau.
http://www.ineris.fr/aida/consultation_document/747

2000/60/CE : Directive Cadre Européenne sur l'Eau (DCE) établissant un cadre pour une politique communautaire dans le domaine de l'eau. http://www.developpement-durable.gouv.fr/IMG/pdf/DGALN_directive-cadre-eau_1_.pdf

Arrêté du 27 octobre 2011 portant modalités d'agrément des laboratoires effectuant des analyses dans le domaine de l'eau et des milieux aquatiques au titre du code de l'environnement :
<http://www.legifrance.gouv.fr/affichTexte.do?cidTexte=JORFTEXT000024767945>

Arrêté du 22 juin 2007 relatif à la collecte, au transport et au traitement des eaux usées des agglomérations d'assainissement ainsi qu'à la surveillance de leur fonctionnement et de leur efficacité, et aux dispositifs d'assainissement non collectif recevant une charge brute de pollution organique supérieure à 1,2 kg/j de DBO5 :
<http://www.legifrance.gouv.fr/affichTexte.do?cidTexte=JORFTEXT000000276647>

Bertrand-Krajewski J.L., Laplace D., Joannis C., Chebbo G., 2000 : Mesures en hydrologie urbaine et assainissement. Techniques et Documentation, Paris, 793 pages

Bertrand-Krajewski, J.-L. , Barraud, S. Lipeme Kouyi, G., Torres A. et Lepot, M., 2008 : Mesurages en continu des flux polluants particuliers en réseaux d'assainissement urbains : enjeux, méthodes, exemple d'application, La Houille Blanche, 4 : 49-57

Cochran, W. G., 1977 : Sampling Techniques, Wiley, 3rd Edition, 448 pp.

Hannouche A., 2012 : Analyse du transport solide en réseau d'assainissement unitaire par temps de pluie : exploitation de données acquises par les observatoires français en hydrologie urbaine (Analysis of solid transport in combined sewer network during wet weather: exploitation of data acquired by the French observatories in urban hydrology), Thèse, Université Paris-Est, France, 485p.

Hannouche, A., Chebbo, G., Joannis, C. 2014 : Représentativité temporelle des mesures de concentration et impacts sur l'incertitude affectant les évaluations de flux, Livrable 34 Tache 7 du projet MENTOR, 50p.

Hannouche A., Joannis C., Chebbo G., 2015 : Assessment of total suspended solids (TSS) event load in combined sewer system from continuous turbidity measurements: Impact of residual errors involved in average TSS-turbidity

relationship. 12 pages, à soumettre à Urban Water Journal.

Joannis, C. et Bertrand Krajewski, J.-C., 2009 : Incertitudes sur un mesurande défini comme une valeur intégrée d'un signal continu discrétisé en fonction du temps - Application aux mesures hydrologiques enregistrées in situ. La Houille blanche, 3: 82-91

Larrarte, F., Cottineau, L.-M., 2005 : Nouveaux instruments pour connaître les champs de vitesses et de concentrations, Revue Européenne de Génie Civil, 9(7-8) : 963-978

Larrarte, F., Bardiaux, J.-B., Battaglia, P., Joannis, C., 2008 : Acoustic Doppler flow-meters: A proposal to characterize their technical parameters, Flow Measurement and Instrumentation, 19 (5) : 261-267

Larrarte, F., Pons, M.-N., 2011 : Suspended solids concentration in wastewater: Influence of sampling conditions, Urban Water Journal, 8(6): 397–404

Ruban G., Joannis, C., Derrien, A.-S., 2007 : Evaluation de la précision des courbes d'étalonnage des turbidimètres par la méthode de Monte Carlo, Novatech 2007, p 1449 (8p.)

Ruban G., Mabilais D., Lemaire K., 2014 : Particle characterization of urban wet-weather discharges: methods and related uncertainties. Urban Water Journal : <http://dx.doi.org/10.1080/1573062X.2014.901397>

Versini, P.-A., Joannis, C., Chebbo, G., 2015 : Guide technique sur le mesurage de turbidité dans les réseaux d'assainissement. ONEMA, Guide et Protocoles 82p : <http://www.onema.fr/Guides-et-Protocoles>

7 Annexe A : Méthode de Monte Carlo

La simulation de Monte Carlo est un outil statistique puissant pour résoudre des problèmes mathématiques complexes ou plus exactement pour approcher leur solution aussi précisément que souhaité. Cette méthode est utilisée pour estimer les incertitudes de mesure Y (grandeur de sortie) à partir des incertitudes relatives aux grandeurs d'entrée $X_{i (i \in \{1, \dots, n\})}$. La grandeur d'entrée Y peut être une fonction explicite

ou implicite en $X_{i (i \in \{1, \dots, n\})} \left(Y = f \left(X_{i (i \in \{1, \dots, n\})} \right) \right)$.

La procédure de l'évaluation de l'incertitude de mesure par la méthode de simulation Monte Carlo, illustrée Figure 14, peut être effectuée par l'intermédiaire des étapes suivantes :

- Création de l'équation du modèle de mesure en fonction des grandeurs et paramètres d'entrée : $Y = f \left(X_{i (i \in \{1, \dots, n\})} \right)$;
- Choix des sources d'incertitude;
- Identification de la fonction de densité de probabilité PDF correspondant à chaque source d'incertitude ;
- Choix du nombre k d'essais de Monte-Carlo (en général, $k = 10000$ de valeurs pour espérer avoir le plus petit niveau de confiance de 95% (ISO/IEC 2008)) ;
- Simulation de k échantillons constitués d'une valeur d'incertitude pour chaque source d'incertitude X_i , considérée comme une variable aléatoire caractérisée par une fonction de densité de probabilité PDF. La simulation pourrait être faite en tenant compte des corrélations entre les variables si elles existent ;
- Calcul des k résultats en appliquant l'équation qui a été définie pour le mesurande Y ;
- Synthèse de l'information obtenue sur le mesurande en restituant :
 - L'espérance mathématique (Moyenne) ;
 - L'écart-type (non demandé par la norme) ;
 - L'intervalle le plus court au niveau de probabilité spécifié (souvent 95%).

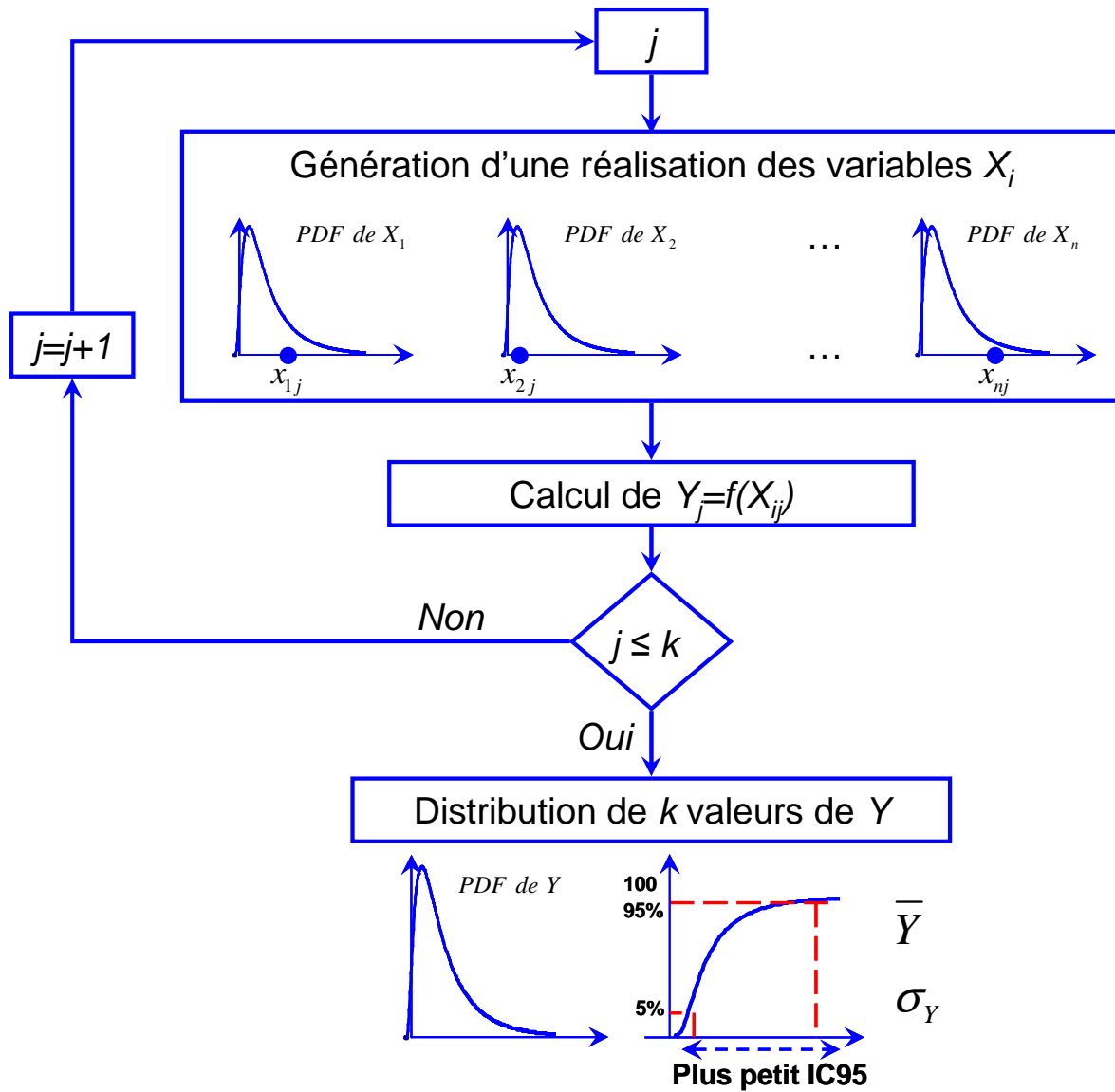


Figure 14 : Procédure de simulations de Monte Carlo

Références

ISO/IEC (2008) ISO/IEC Guide 98-3/Suppl.1:2008(E) Uncertainty of measurement - Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995) Supplement 1: Propagation of distributions using a Monte Carlo method. Geneva (Switzerland): ISO, 2008, 98 p.

8 Annexe B : Régression polynomiale pondérée: incertitudes sur les deux variables

Si nous avons deux variables aléatoires corrélées, nous pourrions vouloir déterminer la relation la plus adaptée entre elles. Les variables aléatoires seront nommées X et Y et nous chercherons le polynôme qui passe au mieux par le nuage de points $y(x)$. Nous disposons de n couples de mesures (x_i, y_i) et les incertitudes correspondantes $u(x_i)$ et $u(y_i)$. On s'interrogera par exemple sur la relation la mieux adaptée entre la turbidité X et la concentration en MES Y ($y=a_0+a_1x$ ou $y=a_0+a_1x+a_2x^2$) et les incertitudes sur ces paramètres a_i .

8.1 Régression sans barre d'erreur sur les mesures ($u(x_i)=0$ et $u(y_i)=0$) : erreurs résiduelles

On considère ici que les mesures x_i et y_i ne sont pas entachées d'erreur.

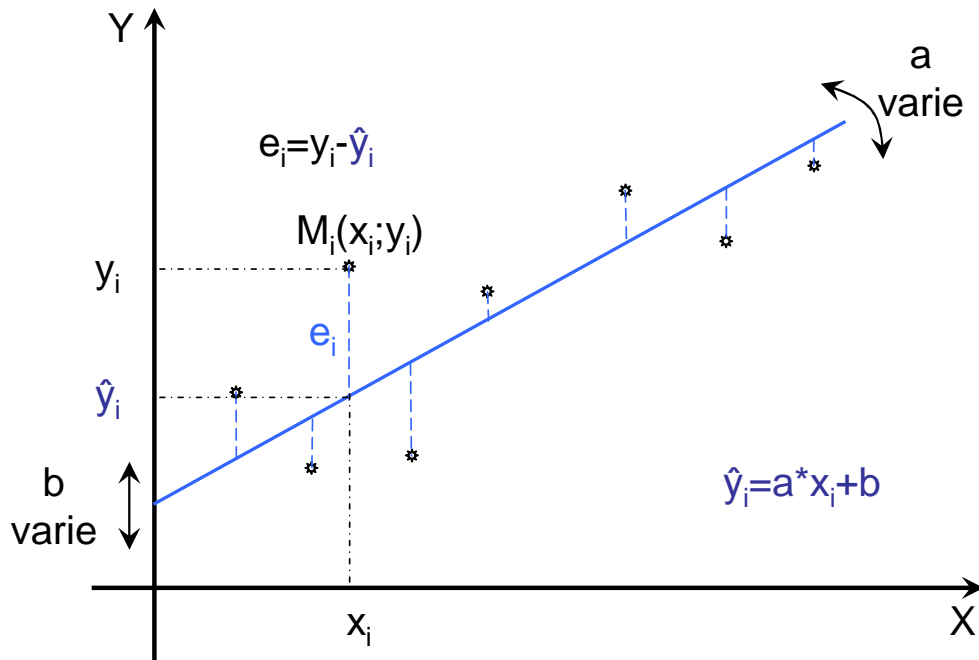


Figure 15 : incertitudes associées à une régression linéaire

La méthode choisie est celle des moindres carrés : la droite considérée la meilleure est celle qui minimise la somme des carrés des distances (selon l'axe y) à la droite (écarts).

L'ensemble des points se note $M_i(x_i, y_i)$. Pour un x_i donné, l'ordonnée estimée sur la droite

s'écrit $\hat{y}_i = ax_i + b$. D'où la somme des distances au carré :
$$\sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Les dérivées partielles de cette quantité selon a et b s'annulent pour la meilleure droite et nous obtenons les équations suivantes : $\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0$. La résolution de ce système conduit à déterminer a et b :

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \times \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x}, \text{ avec } \bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n}$$

On nomme e_i le résidu tel que $y_i = \hat{y}_i + e_i$. Sous les hypothèses que les résidus e_i sont des réalisations d'une variable aléatoire E normalement distribuée $N(0; \sigma_r^2)$ de moyenne zéro et d'écart-type σ_r , on trouve les différents écart-types suivants :

Pour les résidus : $s_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-2}}$ un estimateur sans biais de σ_r ;

Pour la pente : $s_a = \frac{s_r}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$. donc $U(a) = \tau_{n-2} \times s_a$ où τ_{n-2} le coefficient de Student

à $n-2$ degrés de liberté au seuil de confiance souhaité (généralement 95%).

Pour l'ordonnée à l'origine : $s_b = s_r \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$; donc $U(b) = \tau_{n-2} \times s_b$ où τ_{n-2} le

coefficient de Student à $n-2$ degrés de liberté au seuil de confiance souhaité.

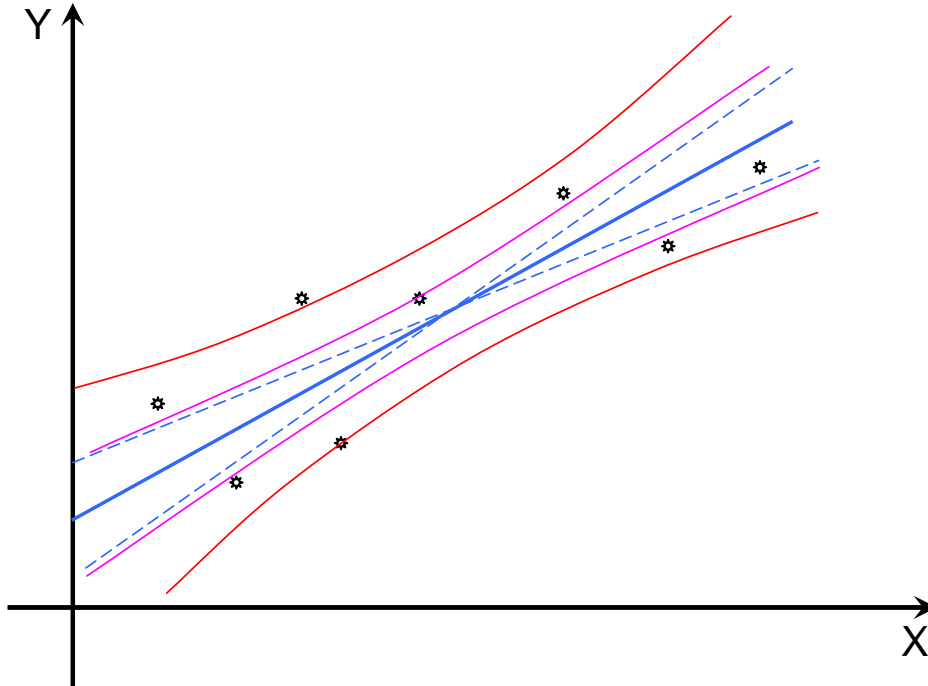


Figure 16 : intervalles de confiance à $1 - \alpha$ sur la droite de régression (en bleu) et sur les prédictions réalisées à partir de cette droite (en rouge)

Sur la Figure 16 nous avons :

- Au milieu, la droite interpolée : point moyen $(\bar{x}; \bar{y})$ (le meilleur équilibre entre les points du dessus et ceux du dessous de cette droite).
- En bleu pointillés sont représentés les deux droites extrêmes ($y = a_{min}x + b_{moy}$ et $y = a_{max}x + b_{moy}$) où $[a_{min}; a_{max}]$ est l'intervalle de confiance de a au niveau de confiance de $1 - \alpha$ %.
- La première enveloppe (rose) correspond à la gamme valeurs estimées de y pour $a \in [a_{min}; a_{max}]$ et $b \in [b_{min}; b_{max}]$ avec $[b_{min}; b_{max}]$ l'intervalle de confiance de b au niveau de confiance de $1 - \alpha$ %

$$U\left(\hat{y}_0\right) = \tau_{n-2} \times s_r \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}} \quad \text{Eq. 8-1}$$

- La deuxième enveloppe (rouge) prend en compte la dispersion résiduelle des valeurs de y autour des valeurs prédites par la régression. En effet la régression n'a qu'une capacité de prédiction limitée, et ne prédit en fait que la valeur moyenne des y pour un x donné. L'intervalle de prédiction pour une observation y_0 vaut :

$$U\left(\hat{y}_0\right) = \tau_{n-2} \times s_r \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} + 1} \quad \text{Eq. 8-2}$$

8.2 Régression linéaire ou polynômiale avec barres d'erreurs sur les mesures

Dans ce second cas, on considère que les mesures x_i et y_i sont entachées d'erreur.

8.2.1 Cas particulier : régression linéaire (degré n=1)

Les instruments de mesure ne sont pas parfaits et les notices indiquent leurs précisions. Nous avons donc une incertitude sur x et y : $M_i(x_i \pm U(x_i); y_i \pm U(y_i))$.

Nous allons ajouter ce qu'on appelle des barres d'erreurs. Dans ce cas, nous n'avons plus des points mais des rectangles. Plus un point est précis, plus il joue un rôle important. La méthode des moindres carrés est modifiée, et la somme des carrés est pondérée par ce "poids" :

$$\sum_{i=1}^n w_i e_i^2 \text{ avec } w_i = \frac{1}{u_{y_i}^2 + (a_1 u_{x_i})^2} \quad \text{Eq. 8-3}$$

Comme x_i est fixé nous reportons la dispersion de x_i sur y_i : $u_{y_i;total}^2 = u_{y_i}^2 + (a_1 u_{x_i})^2$

C'est une méthode itérative initiée à l'aide d'une valeur de a estimée (par la méthode de moindres carrés ordinaire donnée ci-dessus). Après le calcul des w_i , une nouvelle valeur de a est obtenue qui remplace la précédente. L'opération est répétée jusqu'à l'égalité des valeurs (généralement 3-4 itérations).

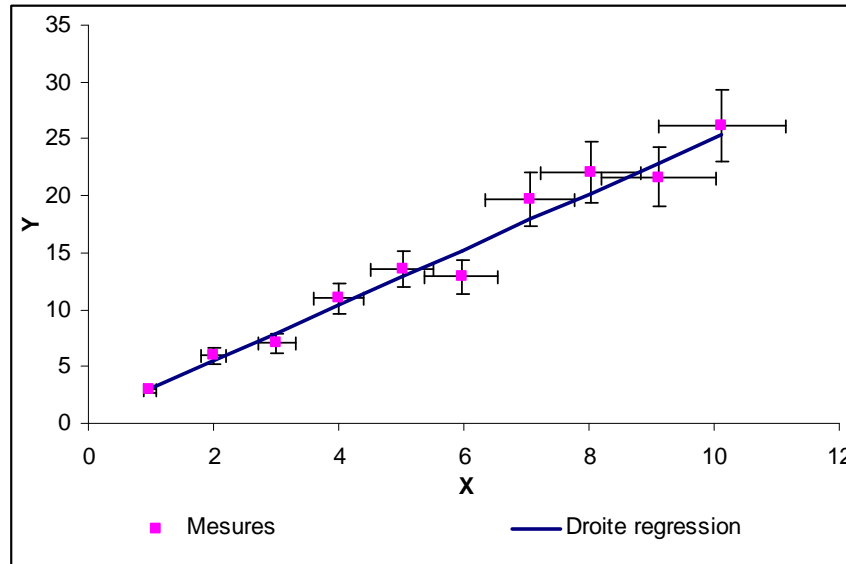


Figure 17 : illustration de la régression linéaire avec des incertitudes sur x et sur y

La minimisation de la somme $S^2 = \sum_i w_i e_i^2 = \sum_i w_i (y_i - a_1 x_i - a_0)^2$ conduit à :

$$a_1 = \frac{\sum_i w_i \times \sum_i w_i x_i y_i - \sum_i w_i x_i \times \sum_i w_i y_i}{\Delta} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \times \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \quad \text{Eq. 8-4}$$

$$\text{et } a_0 = \frac{\sum_i w_i y_i \times \sum_i w_i x_i^2 - \sum_i w_i x_i \times \sum_i w_i x_i y_i}{\Delta} = \bar{y} - a_1 \bar{x} \quad \text{Eq. 8-5}$$

$$\text{avec } \Delta = \sum_i w_i \times \sum_i w_i x_i^2 - \left(\sum_i w_i x_i\right)^2 \text{ et } \bar{u} = \frac{\sum_i w_i u_i}{\sum_i w_i} \quad \text{Eq. 8-6}$$

Comme nous avons reporté les incertitudes de x_i sur y_i , tout se passe comme si seuls les y avaient des incertitude-types composées $u_{y_i;total}$. D'où les formules :

$$u_{a_j}^2 = \sum_i \left(\frac{\partial a_j}{\partial y_i} \right)^2 u_{y_i;total}^2 \quad \text{Eq. 8-7}$$

Les dérivées partielles sont complexes à calculer (les poids w_i dépendent de a_j), mais il est possible de les évaluer numériquement. Aussi nous utilisons habituellement les estimations suivantes :

$$u_{a_1} = \sqrt{\frac{\sum_i w_i}{\Delta}} ; u_{a_0} = \sqrt{\frac{\sum_i w_i x_i^2}{\Delta}} \text{ et } u(a_0, a_1) = \frac{-\sum_i w_i x_i}{\Delta} \quad \text{Eq. 8-8}$$

8.2.2 Cas général : Régression polynômiale de degré n

Nous comparons y_i à la valeur $f(x_i)$ donnée par la fonction cherchée : $y_i - f(x_i)$. Le poids attribué à $(y_i - f(x_i))^2$ est inversement proportionnel à la variance du terme $y_i - f(x_i)$ (x_i et y_i étant indépendantes) : $w_i = \frac{1}{u_{y_i}^2 + (f'(x_i) \times u_{x_i})^2}$. Le problème revient alors à

minimiser la somme $S^2 = \sum_{i=1}^n w_i (y_i - f(x_i))^2$ pour trouver les paramètres de la fonction f .

Dans le cas d'une régression polynômiale de degré n , la fonction $f(x)$ s'écrit sous la forme $f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = A \cdot X$ où A est un vecteur ligne $A = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ et X est un vecteur colonne $X^T = [1, x^1, x^2, \dots, x^n]$. La minimisation de la somme S^2 conduit au système dont l'écriture matricielle est :

$$HA^T = B$$

avec H est une matrice carrée de taille $n+1$ dont les termes de la ligne j et la colonne

$$k \text{ sont : } h_{jk} = \frac{\sum_i w_i x_i^{i+j-2}}{x^{j+k-2}} = \frac{\sum_i w_i x_i^{i+j-2}}{\sum_i w_i}$$

$$\text{et } B \text{ est un vecteur colonne dont la valeur de la ligne } j \text{ est : } b_{j1} = \frac{\sum_i w_i y_i x_i^{j-1}}{\sum_i w_i}$$

La solution du problème sera alors :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = H^{-1} \times B \text{ où } H^{-1} \text{ est la matrice inverse de } H$$

Cette méthode est aussi itérative car w_i dépend des paramètres a_i . Dans un premier temps on prend $w_i=1$ (cas d'une régression polynomiale sans barres d'erreurs sur les mesures x_i et y_i), pour obtenir une première estimation des paramètres a_i . Par itération, nous remplaçons les paramètres estimés dans w_i et on estime de nouveau les paramètres a_i . Cette opération est répétée autant que nécessaire jusqu'à la convergence qui est souvent très rapide (moins de 5 itérations).

Nous utilisons cette dernière estimation pour calculer w_i , H , H^{-1} .
La matrice de covariance des paramètres a_{ij} est estimée par :

$$\text{cov}(A) = [u(a_i; a_j)]_{\substack{1 \leq i \leq n+1 \\ 1 \leq j \leq n+1}} = \begin{bmatrix} u^2(a_0) & u(a_0; a_1) & \cdots & u(a_0; a_n) \\ u(a_1; a_0) & u^2(a_1) & \vdots & u(a_1; a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(a_n; a_0) & u(a_n; a_1) & \cdots & u^2(a_n) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sum_i w_i} H^{-1}$$

8.2.2.1 Cas d'un polynôme de 1er degré : $y=a_0+a_1x$

Dans ce cas, nous avons $A=[a_0, a_1]$

$$f'(x_i)=a_1 \text{ et donc } w_i = \frac{1}{u_{y_i}^2 + (a_1 \times u_{x_i})^2}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x} \\ x & x^2 \end{bmatrix} \text{ donc } H^{-1} = \frac{1}{x^2 - (\bar{x})^2} \begin{bmatrix} x^2 & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{xy} \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc } A^T = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = H^{-1} \times B = \frac{1}{x^2 - (\bar{x})^2} \begin{bmatrix} x^2 \times \bar{y} - \bar{x} \times \bar{xy} \\ \bar{xy} - \bar{x} \times \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{x^2 \times \bar{y} - \bar{x} \times \bar{xy}}{x^2 - (\bar{x})^2} \right) \\ \left(\frac{\bar{xy} - \bar{x} \times \bar{y}}{x^2 - (\bar{x})^2} \right) \end{bmatrix}$$

On retrouve alors les formules données en A.3.2.1.

La matrice de covariance des paramètres est estimée par :

$$[u(a_i; a_j)]_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}} = \begin{bmatrix} u^2(a_0) & u(a_0; a_1) \\ u(a_1; a_0) & u^2(a_1) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sum_i w_i} H^{-1} = \frac{1}{\sum_i w_i \times (x^2 - (\bar{x})^2)} \begin{bmatrix} x^2 & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{la variance résiduelle est donnée par } s_r^2 = \frac{1}{N-2} \sum_i (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

8.2.2.2 Cas d'un polynôme de 2nd degré : $y=a_0+a_1x+a_2x^2$

Dans ce cas, nous avons $A= [a_0, a_1, a_2]$

$$f'(x_i)=a_1+2a_2x \text{ et donc } w_i = \frac{1}{u_{y_i}^2 + (a_1 + 2a_2x)^2 \times u_{x_i}^2}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} & \frac{\bar{x}}{x^2} & \frac{\bar{x}^2}{x^2} \\ \frac{\bar{x}}{x^2} & \frac{\bar{x}^2}{x^3} & \frac{\bar{x}^3}{x^3} \\ \frac{\bar{x}^2}{x^2} & \frac{\bar{x}^3}{x^3} & \frac{\bar{x}^4}{x^4} \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \overline{xy} \\ \overline{x^2y} \end{bmatrix}$$

$$\text{donc } H^{-1} = \frac{1}{\det(H)} \begin{bmatrix} \left(\frac{\bar{x}^3}{x^3}\right)^2 - \frac{\bar{x}^2 \times \bar{x}^4}{x^2 \times x^4} & \frac{\bar{x} \times \bar{x}^4 - \bar{x}^2 \times \bar{x}^3}{x \times x^4 - \bar{x}^2 \times x^3} & \left(\frac{\bar{x}^2}{x^2}\right)^2 - \frac{\bar{x} \times \bar{x}^3}{x^3 - \bar{x} \times x^2} \\ \frac{\bar{x} \times \bar{x}^4 - \bar{x}^2 \times \bar{x}^3}{x \times x^4 - \bar{x}^2 \times x^3} & \left(\frac{\bar{x}^2}{x^2}\right)^2 - \frac{\bar{x}^4}{x^4} & \frac{\bar{x}^3 - \bar{x} \times \bar{x}^2}{x^3 - \bar{x} \times x^2} \\ \left(\frac{\bar{x}^2}{x^2}\right)^2 - \frac{\bar{x} \times \bar{x}^3}{x^3 - \bar{x} \times x^2} & \frac{\bar{x}^3 - \bar{x} \times \bar{x}^2}{x^3 - \bar{x} \times x^2} & \left(\frac{\bar{x}}{x}\right)^2 - \frac{\bar{x}^2}{x^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \det(H) = \left(\frac{\bar{x}}{x}\right)^2 \times \bar{x}^4 - \bar{x}^2 \times \left(2 \times \bar{x} \times \bar{x}^3 + \bar{x}^4\right) + \left(\frac{\bar{x}^2}{x^2}\right)^3 + \left(\frac{\bar{x}^3}{x^3}\right)^2$$

$$\text{Donc } A^T = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = H^{-1} \times B$$

La matrice de covariance des paramètres est estimée par :

$$[u(a_i; a_j)]_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{bmatrix} u^2(a_0) & u(a_0; a_1) & u(a_0; a_2) \\ u(a_1; a_0) & u^2(a_1) & u(a_1; a_2) \\ u(a_2; a_0) & u(a_2; a_1) & u^2(a_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sum_i w_i} H^{-1}$$

La variance résiduelle peut être estimée par :

$$s_r^2 = \frac{1}{N-3} \sum_i (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)^2$$

8.2.3 Calcul d'incertitude sur une valeur prédite

Pour estimer les incertitudes sur une valeur $y_0=f(x_0)$ si on connaît x_0 (prédiction directe) ou sur une valeur $x_0=f^{-1}(y_0)$ (prédiction indirecte) si on connaît y_0 , il suffit d'appliquer la formule de propagation d'incertitude.

8.2.3.1 Cas du 1er degré : $y=f(x)=a_0+a_1x$

- **Prédiction directe**

On connaît x_0 donc $y_0=f(x_0)=a_0+a_1x_0$

Donc l'incertitude sur la valeur moyenne de y_0 (sans tenir compte de l'erreur résiduelle ϵ) sera :

$$u^2(\overline{y_0}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_0} & \frac{\partial f}{\partial a_1} & \frac{\partial f}{\partial x_0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u^2(a_0) & u(a_0; a_1) & 0 \\ u(a_1; a_0) & u^2(a_1) & 0 \\ 0 & 0 & u^2(x_0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_0} \\ \frac{\partial f}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_0} \end{bmatrix}$$

$$\text{soit } u^2(\overline{y_0}) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & a_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u^2(a_0) & u(a_0; a_1) & 0 \\ u(a_1; a_0) & u^2(a_1) & 0 \\ 0 & 0 & u^2(x_0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

Et celle sur la valeur prédite (en tenant compte de l'erreur résiduelle ε) :

$$u^2(\hat{y_0}) = u^2(\overline{y_0}) + s_r^2$$

• **Prédiction indirecte**

On connaît y_0 donc $x_0 = f^{-1}(y_0) = (y_0 - a_0) / a_1$

Donc l'incertitude sur la valeur moyenne de x_0 (sans tenir compte de l'erreur résiduelle ε) sera :

$$u^2(\overline{x_0}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^{-1}}{\partial a_0} & \frac{\partial f^{-1}}{\partial a_1} & \frac{\partial f^{-1}}{\partial x_0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u^2(a_0) & u(a_0; a_1) & 0 \\ u(a_1; a_0) & u^2(a_1) & 0 \\ 0 & 0 & u^2(x_0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial f^{-1}}{\partial a_0} \\ \frac{\partial f^{-1}}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f^{-1}}{\partial x_0} \end{bmatrix}$$

$$\text{soit } u^2(\overline{x_0}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_1} & -\frac{y_0 - a_0}{a_1^2} & \frac{1}{a_1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u^2(a_0) & u(a_0; a_1) & 0 \\ u(a_1; a_0) & u^2(a_1) & 0 \\ 0 & 0 & u^2(y_0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_1} \\ -\frac{y_0 - a_0}{a_1^2} \\ \frac{1}{a_1} \end{bmatrix}$$

Et sur la valeur prédite (en tenant compte de l'erreur résiduelle ε) :

$$u^2(\hat{x_0}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_1} & -\frac{y_0 - a_0}{a_1^2} & \frac{1}{a_1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u^2(a_0) & u(a_0; a_1) & 0 \\ u(a_1; a_0) & u^2(a_1) & 0 \\ 0 & 0 & u^2(y_0) + s_r^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_1} \\ -\frac{y_0 - a_0}{a_1^2} \\ \frac{1}{a_1} \end{bmatrix}$$

8.2.3.2 Cas du 1er degré : $y=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

- **Prédiction directe**

On connaît x_0 donc $y_0=f(x_0)=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2$

Donc l'incertitude sur la valeur moyenne de y_0 (sans tenir compte de l'erreur résiduelle ε) sera :

$$u^2(\overline{y_0}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_0} & \frac{\partial f}{\partial a_1} & \frac{\partial f}{\partial a_2} & \frac{\partial f}{\partial x_0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u^2(a_0) & u(a_0;a_1) & u(a_0;a_2) & 0 \\ u(a_1;a_0) & u^2(a_1) & u(a_1;a_2) & 0 \\ u(a_2;a_0) & u(a_2;a_1) & u^2(a_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^2(x_0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_0} \\ \frac{\partial f}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f}{\partial a_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_0} \end{bmatrix}$$

$$\text{soit } u^2(\overline{y_0}) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & a_1 + 2a_2x_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u^2(a_0) & u(a_0;a_1) & u(a_0;a_2) & 0 \\ u(a_1;a_0) & u^2(a_1) & u(a_1;a_2) & 0 \\ u(a_2;a_0) & u(a_2;a_1) & u^2(a_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^2(x_0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \\ x_0^2 \\ a_1 + 2a_2x_0 \end{bmatrix}$$

Et sur la valeur prédite (en tenant compte de l'erreur résiduelle ε) :

$$u^2(\hat{y}_0) = u^2(\overline{y_0}) + s_r^2$$

- **Prédiction indirecte**

On connaît y_0 donc $x_0=f^{-1}(y_0)$

$$x_0 = \frac{\sqrt{a_1^2 + 4a_2(y_0 - a_0)} - a_1}{2a_2}$$

Donc l'incertitude sur la valeur moyenne de x_0 (sans tenir compte de l'erreur résiduelle ε) sera :

$$u^2(\bar{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^{-1}}{\partial a_0} & \frac{\partial f^{-1}}{\partial a_1} & \frac{\partial f^{-1}}{\partial a_2} & \frac{\partial f^{-1}}{\partial y_0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u^2(a_0) & u(a_0; a_1) & u(a_0; a_1) & 0 \\ u(a_1; a_0) & u^2(a_1) & u(a_1; a_2) & 0 \\ u(a_2; a_0) & u(a_2; a_1) & u^2(a_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^2(y_0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial f^{-1}}{\partial a_0} \\ \frac{\partial f^{-1}}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f^{-1}}{\partial a_2} \\ \frac{\partial f^{-1}}{\partial y_0} \end{bmatrix} \text{ avec}$$

$$\frac{\partial f^{-1}}{\partial a_0} = \frac{-1}{\sqrt{a_1^2 + 4a_2(y_0 - a_0)}}$$

$$\frac{\partial f^{-1}}{\partial a_1} = \frac{\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + 4a_2(y_0 - a_0)}} - 1}{2a_2}$$

$$\frac{\partial f^{-1}}{\partial a_2} = \frac{y_0 - a_0}{a_2 \times \sqrt{a_1^2 + 4a_2(y_0 - a_0)}} - \frac{\sqrt{a_1^2 + 4a_2(y_0 - a_0)} - a_1}{2a_2^2}$$

$$\text{et } \frac{\partial f^{-1}}{\partial y_0} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + 4a_2(y_0 - a_0)}}$$

Et sur la valeur prédite (en tenant compte de l'erreur résiduelle ε) :

$$u^2(\hat{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^{-1}}{\partial a_0} & \frac{\partial f^{-1}}{\partial a_1} & \frac{\partial f^{-1}}{\partial a_2} & \frac{\partial f^{-1}}{\partial y_0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u^2(a_0) & u(a_0; a_1) & u(a_0; a_1) & 0 \\ u(a_1; a_0) & u^2(a_1) & u(a_1; a_2) & 0 \\ u(a_2; a_0) & u(a_2; a_1) & u^2(a_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^2(y_0) + s_r^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial f^{-1}}{\partial a_0} \\ \frac{\partial f^{-1}}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f^{-1}}{\partial a_2} \\ \frac{\partial f^{-1}}{\partial y_0} \end{bmatrix}$$